Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di Matematica Applicata

15 febbraio 2022

1. Si consideri il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 & = 6 \\ -2x_1 + 3x_4 & = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 & = 7 \\ -2x_2 + 4x_3 + 4x_4 & = 4 \end{cases}$$

   Lo si risolva mediante la fattorizzazione PA=LU e si calcoli il suo determinante e la seconda colonna dell'inversa della matrice dei coefficienti.

   Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = -32, \quad A\mathbf{e}_2 = (-1/2, 2, 1, 0)^T, \quad \mathbf{x} = (1, 0, -1, 2)^T.$$

2. Si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove

$$A = \begin{bmatrix} \gamma & 1 & 0 \\ 1 & -3\gamma & -1 \\ 0 & -1 & \gamma \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

   Si stabilisca per quali valori del parametro γ la matrice A è invertibile. Si studi al variare del parametro γ la convergenza del metodo di Gauss-Seidel applicato a tale sistema. Posto $\gamma = 1$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Jacobi, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [1\ 1\ 0]^T$.

   Soluzione. La matrice dei coefficienti è non singolare se $\gamma \neq 0, \pm i\sqrt{6}/9$. Il metodo di Gauss-Seidel converge per $\gamma > \sqrt{6}/9$ oppure $\gamma < -\sqrt{6}/9$. Le prime due iterate del metodo di Jacobi sono $\mathbf{x}^{(1)} = (0, 1/3, 1)^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = (2/3, -1/3, 1/3)^T$.

3. Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = \dfrac{x}{y' - y}, \quad x \in [-2, 2], \\ y(-2) = 1, \ y'(-2) = 2, \end{cases}$$

   e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{2}$ per approssimare la sua soluzione in $x = -1/2$.

   Soluzione. $\boldsymbol{\eta}_1 = (2, 1)^T$, $\boldsymbol{\eta}_2 = (\frac{5}{2}, \frac{7}{4})^T$, $\boldsymbol{\eta}_3 = (\frac{27}{8}, \frac{29}{12})^T$.

4. Calcolare la serie di Fourier della seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -2 \leq x < 0, \\ 1 - \frac{1}{2}x, & 0 \leq x \leq 2, \end{cases}$$

e dire se tale serie è differenziabile termine a termine.

Soluzione. La serie f non è differenziabile termine a termine perché $f(-2) \neq f(2)$, e la serie della soluzione y é

$$S_y(x) = \frac{3}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^k}{k\pi^2} \cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right) + \frac{(-1)^k}{k\pi} \sin\left(k\frac{\pi}{2}x\right).$$

5. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$2y' + y = H(x+7) - H(x-7), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Soluzione.

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -7, \\ \mathrm{e}^{-x/2}(\mathrm{e}^{x/2} - \mathrm{e}^{-7/2}), & -7 < x \leq 7, \\ \mathrm{e}^{-x/2}(\mathrm{e}^{7/2} - \mathrm{e}^{-7/2}), & x > 7. \end{cases}$$