Nome e matricola: . . . .

Corso di studi: . . . .

Prova scritta di Matematica Applicata

16 giugno 2022

1. Si consideri il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 & = 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 & = -1 \\ 4x_1 - 2x_3 & = 2 \end{cases}$$

   Lo si risolva mediante la fattorizzazione PA=LU e si calcoli il suo determinante e la prima colonna dell'inversa della matrice dei coefficienti.

   Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1 & 0 \\ -1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 5/2 \\ 0 & 0 & -3/4 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = -6, \quad A\mathbf{e}_1 = (1/3, -1/3, 2/3)^T, \quad \mathbf{x} = (1, -1, 1)^T.$$

2. Si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove

$$A = \begin{bmatrix} 2\alpha & 0 & 4 \\ 0 & -2\alpha & 0 \\ 4 & 0 & 2\alpha \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   Si stabilisca per quali valori di α la matrice A è invertibile. Si studi al variare di α la convergenza del metodo di Gauss-Seidel applicato a tale sistema. Posto $\alpha = 1$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Jacobi, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [1\ 1\ 0]^T$.

   Soluzione. La matrice dei coefficienti è non singolare se $\alpha \neq 0, \pm 2$. Il metodo di Gauss-Seidel converge per $\alpha > 2$ oppure $\alpha < -2$. Le prime due iterate del metodo di Jacobi sono $\mathbf{x}^{(1)} = (1/2, 0, -3/2)^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = (7/2, 0, -1/2)^T$.

3. Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = \dfrac{y'(x-1)}{y+1}, \quad x \in [0,1], \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2, \end{cases}$$

   e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{2}$ per approssimare la sua soluzione in $x = 1$.

   Soluzione. $\boldsymbol{\eta}_1 = (2, \frac{3}{2})^T$, $\boldsymbol{\eta}_2 = (\frac{11}{4}, \frac{11}{8})^T$.

4. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$y'' + 2y = f(x), \qquad x \in [-1, 1]\,,$$

essendo

$$f(x) = \begin{cases} -2x, & -1 \le x < -\frac{1}{2}, \\ 1, & -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}, \\ 2x, & \frac{1}{2} \le x < 1, \end{cases}$$

e dire se la serie di $f(x)$ è differenziabile termine a termine.

Soluzione. La funzione f è differenziabile e la serie della soluzione y é

$$S_y(x) = \frac{5}{8} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4\left((-1)^k - \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)\right)}{k^2\pi^2(2 - k^2\pi^2)} \cos\left(k\pi x\right).$$

5. Eseguire i seguenti calcoli

$$\mathcal{F}\left\{\frac{2x}{x^2+16}\right\}, \qquad \left[\mathrm{e}^{-3x}H(x)\right] * \left[H(x-4) - H(x-5)\right].$$

Soluzione.

$$F(k) = 2\pi\mathrm{i}[e^{4k}H(-k) - e^{-4k}H(k)], \qquad f(x) = \begin{cases} 0, & x < 4 \\ \dfrac{1 - e^{3(4-x)}}{3}, & x \in [4, 5) \\ \frac{e^{-3x}}{3}(e^{15} - e^{12}), & x \ge 5 \end{cases}.$$