Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di Matematica Applicata

26 luglio 2022

1. Si consideri il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = 1 \\ -2x_1 + 3x_3 + x_4 & = 7 \\ 4x_1 + 2x_2 - 2x_4 & = 0 \\ -x_2 + 2x_3 - 2x_4 & = 1 \end{cases}$$

   Lo si risolva mediante la fattorizzazione $PA = LU$ e si calcoli il suo determinante e la quarta colonna dell'inversa della matrice dei coefficienti.

   Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & -3/10 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1/10 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = -2, \quad A\mathbf{e}_4 = (-3, 3, -1, -3)^T, \quad \mathbf{x} = (0, 1, 2, 1)^T.$$

2. Si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove

$$A = \begin{bmatrix} 4\beta & 2\beta & \beta \\ 2\beta & 1 & 0 \\ \beta & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   Si stabilisca per quali valori di $\beta \geq 0$ la matrice A è invertibile. Si studi al variare di β la convergenza del metodo di Jacobi applicato a tale sistema. Posto $\beta = 1$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Gauss–Seidel, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [1\ 1\ 1]^T$.

   Soluzione. La matrice dei coefficienti è non singolare se $\beta \neq 0, 4/5$. Il metodo di Gauss-Seidel converge per $-4/5 < \beta < 4/5$. Le prime due iterate del metodo di Jacobi sono $\mathbf{x}^{(1)} = (-1/2, 1, 3/2)^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = (-5/8, 5/4, 13/8)^T$.

3. Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = \dfrac{y' - y}{2x}, \quad x \in [1, 5], \\ y(1) = 0, \ y'(1) = 1, \end{cases}$$

   e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{2}$ per approssimare la sua soluzione in $x = 2$.

   Soluzione. $\boldsymbol{\eta}_1 = (\frac{1}{2}, \frac{5}{4})^T$, $\boldsymbol{\eta}_2 = (\frac{9}{8}, \frac{11}{8})^T$.

4. Sviluppare in serie di Fourier la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 2 & -2 \leq x < -1, \\ -2x & -1 \leq x < 1, \\ -2 & 1 \leq x \leq 2, \end{cases}$$

e dire se la serie di $f(x)$ è differenziabile termine a termine.

Soluzione. La funzione f non è differenziabile termine a termine e la serie di Fourier é

$$S_f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k\pi} \left[(-1)^k - \frac{2}{k\pi} \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) \right] \sin\left(k\frac{\pi}{2}x\right).$$

5. Eseguire i seguenti calcoli:

$$\mathcal{F}\left\{ \frac{\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}}{x^2 + 2x + 2} \right\}, \quad \mathcal{F}^{-1}\left\{ \frac{\mathrm{i}k\,\mathrm{e}^{3\mathrm{i}k}}{k^2 + 4} \right\}.$$

Soluzione.

$$F(k) = \pi \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-3)-|k-3|},$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}\left[e^{-2(x+3)} H(x+3) - e^{2(x+3)} H(-x-3) \right].$$