

Nome e matricola: .....

Corso di studi: .....

### Prima prova intermedia di Matematica Applicata

15 novembre 2022

Compito numero 1

1. Si considerino i seguenti vettori

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si dica se il vettore  $\mathbf{v}_1$  è ortogonale al vettore  $\mathbf{v}_3$  e si calcoli la norma  $\infty$ , norma 1 e norma 2 del vettore  $\mathbf{v}_2$ . Si costruisca, inoltre, mediante il procedimento di Gram-Schmidt l'insieme di vettori ortonormali  $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3\}$  a partire dai vettori dati. Dire se i vettori di partenza sono linearmente indipendenti e perché.

*Soluzione.* Il vettore  $\mathbf{v}_1$  non è ortogonale al vettore  $\mathbf{v}_3$ ,

$$\|\mathbf{v}_2\|_\infty = 1, \quad \|\mathbf{v}_2\|_1 = 3, \quad \|\mathbf{v}_2\|_2 = \sqrt{3}.$$

I vettori ortonormali richiesti sono

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{15}}{15} \\ -\frac{\sqrt{15}}{5} \\ -\frac{2\sqrt{15}}{15} \\ \frac{\sqrt{15}}{15} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_3 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{10}}{10} \\ \frac{\sqrt{10}}{10} \\ \frac{5}{\sqrt{10}} \\ -\frac{5}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$$

I vettori dati sono linearmente indipendenti in quanto il procedimento di Gram-Schmidt non si è arrestato nella formazione dei tre vettori ortonormali.

2. Si considerino le seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} 4 & \alpha & 0 \\ \alpha & 4 & \alpha \\ 0 & \alpha & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3\beta & 1/4 & \beta \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ \beta & 1/4 & 3\beta \end{bmatrix}, \quad Q = I - 2\mathbf{w}\mathbf{w}^T,$$

dove  $\alpha$  e  $\beta$  sono parametri reali,  $I$  è la matrice identità e  $\mathbf{w} = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)^T$ . Dire per quali valori di  $\alpha$  la matrice  $A$  è non singolare e per quali valori i suoi autovalori sono positivi. Si fissi ora  $\alpha = -2$ . Determinare lo spettro e il raggio spettrale di  $A$  e gli autovalori di  $A^2$ . Determinare inoltre i valori di  $\beta$  che rendono  $B$  l'inversa di  $A$ . Verificare infine che  $QQ^T = I$  e calcolare la matrice  $M = (AQ)^{-1}$ .

*Soluzione.* La matrice  $A$  è non singolare per  $\alpha \neq \pm 2\sqrt{2}$  e i suoi autovalori sono positivi per  $-2\sqrt{2} < \alpha < 2\sqrt{2}$ . Posto  $\alpha = -2$ ,  $\sigma(A) = \{4 - 2\sqrt{2}, 4, 4 + 2\sqrt{2}\}$ ,  $\rho(A) = 4 + 2\sqrt{2}$ ,  $\sigma(A^2) = \{24 - 16\sqrt{2}, 16, 24 + 16\sqrt{2}\}$ . La matrice  $B$  è l'inversa di  $A$  per  $\beta = 1/8$ ,  $QQ^T = I$  e

$$M = (AQ)^{-1} = Q^T B = \begin{bmatrix} -1/4 & -1/2 & -1/4 \\ -3/8 & -1/4 & -1/8 \\ 1/8 & 1/4 & 3/8 \end{bmatrix}.$$

3. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$-y' + 3y = f(x), \quad x \in [-2, 2],$$

essendo

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & -2 \leq x < -1, \\ 1, & -1 \leq x < 1, \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2, \end{cases}$$

e dire se la serie di  $f(x)$  è differenziabile termine a termine.

*Soluzione.*

$$y(x) = \frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{12a_k}{36 + k^2\pi^2} \cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{2k\pi a_k}{36 + k^2\pi^2} \sin\left(k\frac{\pi}{2}x\right)$$

dove i coefficienti  $a_k$  sono dati da

$$a_k = \frac{4}{(k\pi)^2} \left[ \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) - (-1)^k \right].$$

4. Eseguire i seguenti calcoli

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{e^{5i(k+1)}}{k^2 + 2k + 6} \right\}, \quad \mathcal{F} \left\{ \frac{x \sin(3x)}{6 + 2x^2} \right\}$$

*Soluzione.*

$$f(x) = \frac{\sqrt{5}}{10} e^{-\sqrt{5}|x+5|-ix},$$

$$F(k) = \frac{\pi}{4} \left[ e^{\sqrt{3}(k-3)} H(-k+3) - e^{-\sqrt{3}(k-3)} H(k-3) - e^{\sqrt{3}(k+3)} H(-k-3) + e^{-\sqrt{3}(k+3)} H(k+3) \right].$$

5. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$5y' + 7y = [H(x+3) - H(x-5)], \quad x \in \mathbb{R}.$$

*Soluzione.*

$$y(x) = \frac{1}{7} \begin{cases} 0, & x < -3, \\ 1 - e^{-7/5(x+3)}, & -3 \leq x < 5, \\ (e^7 - e^{-21/5}) e^{-7/5x}, & x \geq 5. \end{cases}$$

Nome e matricola: .....

Corso di studi: .....

### Prima prova intermedia di Matematica Applicata

15 novembre 2022

Compito numero 2

1. Si considerino i seguenti vettori

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si dica se il vettore  $\mathbf{v}_1$  è ortogonale al vettore  $\mathbf{v}_3$  e si calcoli la norma  $\infty$ , norma 1 e norma 2 del vettore  $\mathbf{v}_1$ . Si costruisca, inoltre, mediante il procedimento di Gram-Schmidt l'insieme di vettori ortonormali  $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3\}$  a partire dai vettori dati. Dire se i vettori di partenza sono linearmente indipendenti e perché.

*Soluzione.* Il vettore  $\mathbf{v}_1$  non è ortogonale al vettore  $\mathbf{v}_3$ ,

$$\|\mathbf{v}_1\|_\infty = 1, \quad \|\mathbf{v}_1\|_1 = 3, \quad \|\mathbf{v}_1\|_2 = \sqrt{3}.$$

I vettori ortonormali richiesti sono

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{15}}{15} \\ \frac{2\sqrt{15}}{15} \\ \frac{\sqrt{15}}{5} \\ \frac{\sqrt{15}}{15} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_3 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{10}}{10} \\ \frac{\sqrt{10}}{10} \\ \frac{5}{5} \\ -\frac{\sqrt{10}}{5} \\ \frac{\sqrt{10}}{10} \end{bmatrix}$$

I vettori dati sono linearmente indipendenti in quanto il procedimento di Gram-Schmidt non si è arrestato nella formazione dei tre vettori ortonormali.

2. Si considerino le seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} \gamma & -2 & 0 \\ -2 & \gamma & -2 \\ 0 & -2 & \gamma \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3/8 & 1/4 & 1/8 \\ \delta & 1/2 & \delta \\ 1/8 & 1/4 & 3/8 \end{bmatrix}, \quad Q = I - 2\mathbf{w}\mathbf{w}^T,$$

dove  $\gamma$  e  $\delta$  sono parametri reali,  $I$  è la matrice identità e  $\mathbf{w} = (\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2)^T$ . Dire per quali valori di  $\gamma$  la matrice  $A$  è non singolare e per quali valori i suoi autovalori sono positivi. Si fissi ora  $\gamma = 4$ . Determinare lo spettro e il raggio spettrale di  $A$  e gli autovalori di  $A^2$ . Determinare inoltre i valori di  $\delta$  che rendono  $B$  l'inversa di  $A$ . Verificare infine che  $QQ^T = I$  e calcolare la matrice  $M = (AQ)^{-1}$ .

*Soluzione.* La matrice  $A$  è non singolare per  $\gamma \neq 0, \pm 2\sqrt{2}$  e i suoi autovalori sono positivi per  $\gamma > 2\sqrt{2}$ . Posto  $\gamma = 4$ ,  $\sigma(A) = \{4 - 2\sqrt{2}, 4, 4 + 2\sqrt{2}\}$ ,  $\rho(A) = 4 + 2\sqrt{2}$ ,  $\sigma(A^2) = \{24 - 16\sqrt{2}, 16, 24 + 16\sqrt{2}\}$ . La matrice  $B$  è l'inversa di  $A$  per  $\delta = 1/4$ ,  $QQ^T = I$  e

$$M = (AQ)^{-1} = Q^T B = \begin{bmatrix} -1/8 & -1/4 & -3/8 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ -3/8 & -1/4 & -1/8 \end{bmatrix}.$$

3. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$-y' + 3y = f(x), \quad x \in [-2, 2],$$

essendo

$$f(x) = \begin{cases} -x - 2 & -2 \leq x < -1, \\ -1, & -1 \leq x < 0, \\ 1, & 0 \leq x < 1, \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2, \end{cases}$$

e dire se la serie di  $f(x)$  è differenziabile termine a termine.

*Soluzione.*

$$y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k\pi b_k}{36 + k^2\pi^2} \cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right) + \frac{12b_k}{36 + k^2\pi^2} \sin\left(k\frac{\pi}{2}x\right)$$

dove

$$b_k = \frac{2}{k\pi} + \frac{4}{(k\pi)^2} \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)$$

4. Eseguire i seguenti calcoli

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{e^{3i(k-2)}}{k^2 - 4k + 6} \right\}, \quad \mathcal{F} \left\{ \frac{x \cos(5x)}{6 + 3x^2} \right\}$$

*Soluzione.*

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{4} e^{-\sqrt{2}|x+3|+2ix},$$

$$F(k) = \frac{\pi i}{6} \left[ e^{\sqrt{2}(k+5)} H(-k-5) - e^{-\sqrt{2}(k+5)} H(k+5) - e^{\sqrt{2}(k-5)} H(5-k) - e^{-\sqrt{2}(k-5)} H(k-5) \right].$$

5. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$7y' - 3y = [H(x+2) - H(x-2)], \quad x \in \mathbb{R}.$$

*Soluzione.*

$$y(x) = \frac{1}{3} \begin{cases} (e^{-6/7} - e^{6/7}) e^{3/7x}, & x < -2, \\ e^{3/7(x-2)} - 1, & -2 \leq x < 2, \\ 0, & x \geq 2. \end{cases}$$