Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Recupero seconda prova intermedia di Matematica Applicata

25 gennaio 2022

1. Si considerino le seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 2 \\ \alpha & 2 & \alpha \\ 2 & \alpha & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1/2 & \beta & 0 \\ \beta & -1/2 & \beta \\ 0 & \beta & -1/2 \end{bmatrix}, \qquad Q = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & \gamma & 0 \\ -1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix},$$

dove α, β e γ sono parametri reali. Dire per quali valori di α la matrice A è non singolare e determinare il suo raggio spettrale al variare del parametro α. Si fissi ora $\alpha = -2$. Determinare i valori di β che rendono B l'inversa di A e calcolare il condizionamento in norma 1, 2 e ∞ di A. Assegnato a γ un valore che renda Q ortogonale, risolvere il sistema $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $M = QA$ e $\mathbf{b} = (0, -1, 0)^T$.

Soluzione. La matrice A è non singolare per $\alpha \neq \pm\sqrt{2}$ e il suo raggio spettrale è $2 + \sqrt{2}|\alpha|$ per ogni valore di α. Posto $\alpha = -2$, la matrice B è l'inversa di A per $\beta = -1/2$, $\kappa_\infty(A) = \kappa_1(A) = 9$ e $\kappa_2(A) = 3 + 2\sqrt{2}$. La matrice Q è ortogonale per $\gamma = \pm 1$ e $\mathbf{x} = B(Q^T\mathbf{b}) = (1/2, 1/2, 1/2)^T$.

2. Si risolva mediante la fattorizzazione $PA = LU$ il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 - 4x_3 + x_4 = -1 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 - 3x_2 + \frac{3}{2}x_3 - \frac{5}{2}x_4 = 6 \\ -x_1 - 2x_3 + 4x_4 = -9. \end{cases}$$

Si calcoli inoltre, mediante tale fattorizzazione, il determinante della matrice dei coefficienti del sistema.

Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1 & 0 \\ -1/2 & -1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = 64, \quad \mathbf{x} = [1, 0, 0, -2]^T.$$

3. Si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 3 \\ 0 & \alpha & 2 \\ 3 & 2 & \alpha \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si stabilisca per quali valori del parametro α la matrice A è invertibile e per quali è definita positiva. Si studi inoltre, al variare del parametro α, la convergenza del metodo di Gauss-Seidel applicato a tale sistema. Posto $\alpha = 4$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Jacobi, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [0\ 0\ 0]^T$.

Soluzione. La matrice dei coefficienti è non singolare se $\alpha \neq 0, \pm\sqrt{13}$ ed è definita positiva per $\alpha > \sqrt{13}$. Il metodo di Gauss-Seidel converge per $\alpha > \sqrt{13}$ oppure $\alpha < -\sqrt{13}$. Le prime due iterate del metodo di Jacobi sono $\mathbf{x}^{(1)} = (1/4, 0, 1/4)^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = (1/16, -1/8, 1/16)^T$.

4. Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = xy - y', \quad x \in [2, 5] \\ y(2) = 2, y'(2) = 1 \end{cases}$$

e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{2}$ per approssimare la sua soluzione in $x = 3$.

Soluzione. $\boldsymbol{\eta}_1 = (\frac{5}{2}, \frac{5}{2})^T$, $\boldsymbol{\eta}_2 = (\frac{15}{4}, \frac{35}{8})^T$.

5. Dire per quali valori del parametro $\gamma \in \mathbb{R}$ il seguente metodo alle differenze finite è convergente

$$\begin{cases} \eta_{i+1} = \eta_i + h\Big[-2\gamma f(x_i, \eta_i) + (2\gamma + 1) f(x_i + 2\gamma h, \eta_i + 2\gamma h f(x_i, \eta_i))\Big] \\ \eta_0 = y_0 \end{cases}$$

e per quali risulta del second'ordine. Stabilire, inoltre, per quali dei due valori $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\alpha = \frac{5}{2}$ il seguente metodo multistep

$$\eta_{k+2} = \alpha \eta_{k+1} - (\alpha - 1)\eta_k + 3h f(x_k, \eta_k)$$

è stabile.

Soluzione. Il primo metodo è consistente per ogni valore di γ ed è quindi sempre convergente, in quanto essendo monostep è stabile. Risulta del secondo ordine per $\gamma = (-1 \pm \sqrt{3})/4$. Il metodo multistep è stabile per $\alpha = \frac{1}{2}$, ma non per $\alpha = \frac{5}{2}$.