Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di Matematica Applicata
3 aprile 2023

Compito numero 1

1. Si risolva mediante la fattorizzatione $PA = LU$ il sistema lineare

$$\begin{cases} 2x_1 - 8x_2 + 6x_3 - 2x_4 = -2 \\ 4x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 8x_4 = 20 \\ -8x_2 + 2x_3 - 14x_4 = -46 \\ 6x_1 + 12x_2 - 6x_4 = -6. \end{cases}$$

   Si calcoli inoltre, mediante tale fattorizzazione, il determinante della matrice dei coefficienti del sistema.

   Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 6 & 12 & 0 & -6 \\ 0 & -12 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -18 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = 7776, \quad \mathbf{x} = [0, 1, 2, 3]^T.$$

2. Si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 3\alpha \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   Si stabilisca per quali valori del parametro α la matrice A è invertibile e per quali è definita positiva. Si studi inoltre, al variare del parametro α, la convergenza del metodo di Gauss-Seidel applicato a tale sistema. Posto $\alpha = 2$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Jacobi, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [0\ 0\ 0]^T$.

   Soluzione. La matrice dei coefficienti è non singolare se $\alpha \neq 0, \pm 1$, definita positiva se $\alpha > 1$. Il metodo di Gauss-Seidel converge per $\alpha < -1$ oppure $\alpha > 1$. Le prime due iterate del metodo di Jacobi sono $\mathbf{x}^{(1)} = [1/2, -1/2, 1/6]^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = [3/4, -3/4, 1/6]^T$.

3. Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = 2yy' - x, \quad x \in [1, 5] \\ y(1) = 2, y'(1) = 1, \end{cases}$$

e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{2}$ per approssimare la sua soluzione in $x = 2$.

Soluzione. $\boldsymbol{\eta}_1 = (\frac{5}{2}, \frac{5}{2})^T$, $\boldsymbol{\eta}_2 = (\frac{15}{4}, 8)^T$.

4. Calcolare la serie di Fourier della seguente funzione e stabilire se è differenziabile termine a termine

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -2 \leq x < -1, \\ x+2, & -1 \leq x < 0, \\ 2-x, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Soluzione. La serie è differenziabile termine a termine e risulta essere

$$S_f(x) = \frac{5}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2\pi^2} \left[1 - \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)\right] \cos\left(\frac{k\pi}{2}x\right).$$

5. Eseguire i seguenti calcoli

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}k}(k-3)}{k^2-6k+12}\right\}, \qquad \mathcal{F}\left\{\frac{\sin(2x-4)}{(x-2)\mathrm{e}^{5\mathrm{i}x}}\right\}$$

Soluzione.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{e}^{3\mathrm{i}(x-2)}\left[\mathrm{e}^{-\sqrt{3}(x-2)}H(x-2) - \mathrm{e}^{\sqrt{3}(x-2)}H(2-x)\right], \\ F(k) &= \pi\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}(k+5)}\left[H(-k-3) - H(-k-7)\right]. \end{aligned}$$