Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di Matematica Applicata
14 giugno 2023

Compito numero 1

1. Si risolva mediante la fattorizzatione $PA = LU$ il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 14x_3 + 4x_4 = -3 \\ x_2 + 7x_3 + 7x_4 = -1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 13x_3 + 7x_4 = -2. \end{cases}$$

Si calcoli inoltre il determinante della matrice dei coefficienti del sistema.

Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1 & 0 \\ 1 & 2/3 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 12 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = 18, \quad \mathbf{x} = [1, -1, 0, 0]^T.$$

2. Si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove

$$A = \begin{bmatrix} 2\alpha & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 3\alpha \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si stabilisca per quali valori del parametro α la matrice A è invertibile. Si studi inoltre, al variare del parametro α, la convergenza del metodo di Gauss-Seidel applicato a tale sistema. Posto $\alpha = 2$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Jacobi, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [0\ 0\ 0]^T$.

Soluzione. La matrice dei coefficienti è non singolare se $\alpha \neq 0, \pm\sqrt{5/6}$. Il metodo di Gauss-Seidel converge per $\alpha < -\sqrt{5/6}$ oppure $\alpha > \sqrt{5/6}$. Le prime due iterate del metodo di Jacobi sono $\mathbf{x}^{(1)} = [1/4, 0, 1/6]^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = [1/4, -5/24, 1/6]^T$.

3. Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = (x-1)y' + x^2 y, \quad x \in [1, 3] \\ y(1) = 0, y'(1) = -1 \end{cases}$$

e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{2}$ per approssimare la sua soluzione in $x = 2$.

Soluzione. $\boldsymbol{\eta}_1 = (-\frac{1}{2}, -1)^T$, $\boldsymbol{\eta}_2 = (-1, -\frac{29}{16})^T$.

4. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo $[-3,3]$ e dire se $f(x)$ è differenziabile termine a termine

$$2y'' + y = f(x), \quad f(x) = \begin{cases} 1, & -3 \leq x < -1, \\ 3+x, & -1 \leq x < 0, \\ 3-x, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & 1 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Soluzione. La f non è diffirenziabile in quanto non continua nell'intervallo $[-3,3]$. La soluzione dell'equazione differenziale è

$$y(x) = \frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{9a_k}{9 - 2k^2\pi^2} \right) \cos\left(k\frac{\pi}{3}x \right)$$

dove

$$a_k = \frac{2}{k\pi} \sin\left(k\frac{\pi}{3} \right) + \frac{6}{(k\pi)^2} \left(1 - \cos\left(k\frac{\pi}{3} \right) \right).$$

5. Eseguire i seguenti calcoli

$$\mathcal{F}\left\{ \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{(x-2)^2+4} \right\}, \quad \mathcal{F}^{-1}\left\{ \frac{\sin(2(k-3))}{(k-3)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k}} \right\}.$$

Soluzione.

$$F(k) = \frac{\pi}{2} e^{-2\mathrm{i}(k+1)-2|k+1|}$$
$$f(x) = \frac{1}{2} \mathrm{e}^{3\mathrm{i}(x-1)} [H(x+1) - H(x-3)].$$