Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di Matematica Applicata

10 novembre 2023

1. Dopo aver calcolato la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

la si utilizzi per calcolare il determinante di A e la soluzione del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove $\mathbf{b} = [-8, 0, 2, 6]^T$.

Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = -256, \quad \mathbf{x} = [2, 1, -1, -2]^T.$$

2. Stabilire per quali valori del parametro reale β il metodo di Gauss-Seidel applicato al sistema lineare

$$\begin{cases} 2\beta x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 + 2\beta x_2 + x_3 = 12 \\ x_2 + 2\beta x_3 = 20 \end{cases}$$

è convergente. Fissato $\beta = 1$ e il vettore iniziale $[1, 0, 1]^T$, si calcolino le prime due iterazioni del metodo di Jacobi. Dire infine per quali valori di β la matrice è non singolare e per quali è definita positiva.

Soluzione. La matrice dei coefficienti è non singolare se $\beta \neq 0, \pm\sqrt{2}/2$, definita positiva se $\beta > \sqrt{2}/2$. Il metodo di Gauss-Seidel converge per $\beta < -\sqrt{2}/2$ oppure $\beta > \sqrt{2}/2$. Le prime due iterate del metodo di Jacobi sono $\mathbf{x}^{(1)} = [3, 5, 10]^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = [1/2, -1/2.15/2]^T$.

3. Utilizzando il metodo di Eulero-Cauchy esplicito, approssimare la soluzione dell'equazione

$$\begin{cases} y'' = 2 - x - xy \\ y(1) = 0, \ y'(1) = 1 \end{cases}$$

in $x = 2$, avendo posto il passo $h = \frac{1}{2}$.

Soluzione. $\boldsymbol{\eta}_1 = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})^T$, $\boldsymbol{\eta}_2 = (\frac{5}{4}, \frac{11}{8})^T$

4. Sviluppare in serie di Fourier la seguente funzione e dire se la serie è derivabile termine a termine

$$f(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{x}{3}\right), & x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right), \\ -1, & x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \\ f(x+2\pi), & \text{altrove.} \end{cases}$$

Soluzione.

$$S_f(x) = \frac{3\sqrt{3} - 3 - \pi}{2\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx),$$

dove

$$a_k = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{2}{k}\sin k\frac{\pi}{2} + \frac{3}{1+3k}\left(\sin\left(\frac{1}{3}+k\right)\pi - \sin\left(\frac{1}{3}+k\right)\frac{\pi}{2}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{3}{1-3k}\left(\sin\left(\frac{1}{3}-k\right)\pi - \sin\left(\frac{1}{3}-k\right)\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

5. Eseguire i seguenti calcoli:

$$\mathcal{F}\left\{e^{-|x|}\sin\left(\frac{3x}{2}\right)\right\}, \quad \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{3e^{-3ik}}{1+(k+3)^2}\right\}$$

Soluzione.

$$F_1(k) = \frac{1}{\mathrm{i}}\left(\frac{1}{1+\left(k-\frac{3}{2}\right)^2} - \frac{1}{1+\left(k+\frac{3}{2}\right)^2}\right), \quad f_2(x) = \frac{3}{2}e^{-3\mathrm{i}(x-3)}e^{-|x-3|}.$$