Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Seconda prova intermedia di Matematica Applicata

15 gennaio 2024

Compito numero 1

1. Si considerino le seguenti matrici

$$M = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \qquad N = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \alpha & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \alpha \\ \beta & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \qquad Q = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\gamma}{2} & \frac{\gamma}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ 0 & \gamma & -\gamma \end{bmatrix},$$

   dove α, β e γ sono parametri reali. Determinare in modo efficiente il determinante di N e il suo raggio spettrale quando $\beta = 0$, al variare del parametro α. Stabilire per quali valori di α e β la matrice N è l'inversa di M, per quali valori di γ la matrice Q è ortogonale. Assegnati a ciascuno dei tre parametri uno dei valori che verificano la proprietà richiesta, si determini l'indice di condizionamento di Q in norma 1, 2 e ∞, e si risolva nel modo più conveniente il sistema lineare $Ax = b$ dove $A = QM$ e $b = [1, 0, -1]^T$.

   Soluzione. Se $\beta = 0$, $\det(N) = 1/64$ e $\rho(N) = 1/4$ indipendentemente dal valore di α. La matrice N è l'inversa di M per $\alpha = -1/9$ e $\beta = 0$, mentre Q è ortogonale per $\gamma = \sqrt{2}/2$, $\mathrm{cond}_2(Q) = 1$ e $\mathrm{cond}_\infty(Q) = \mathrm{cond}_1(Q) = (\sqrt{6}+1)(\sqrt{6}+3\sqrt{2})/8$. La soluzione del sistema è

$$\mathbf{x} = NQ^T\mathbf{b} = \left(\frac{4\sqrt{3}+\sqrt{2}}{32}, -\frac{5\sqrt{2}}{16}, \frac{3\sqrt{2}}{16} \right)^T.$$

2. Si risolva mediante la fattorizzazione $PA = LU$ il sistema lineare

$$\begin{cases} 2x_2 + 5x_3 = -8 \\ x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 12 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 = 2 \\ 3x_1 + 6x_2 - 3x_4 = 12. \end{cases}$$

   Si calcoli inoltre, mediante tale fattorizzazione, il determinante della matrice dei coefficienti del sistema.

   Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = 144, \quad \mathbf{x} = [2, 1, -2, 0]^T.$$

3. Si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove

$$A = \begin{bmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Si stabilisca per quali valori del parametro a il sistema ammette un'unica soluzione e per quali valori la matrice è simmetrica definita positiva. Si studi inoltre, al variare del parametro a, la convergenza del metodo di Gauss-Seidel applicato a tale sistema. Si fissi $a = 4$ e si calcolino le prime due iterate del metodo di Jacobi a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 1, 1]^T$.

Soluzione. La matrice dei coefficienti è non singolare se $a \neq 0, \pm\sqrt{5}$, è simmetrica per ogni valore di a, definita positiva se $a > \sqrt{5}$. Il metodo di Gauss-Seidel converge per $a < -\sqrt{5}$ e $a > \sqrt{5}$. Le prime due iterate del metodo di Jacobi sono $\mathbf{x}^{(1)} = [-1/4, -1, 1/2]^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = [7/8, -7/8, 9/16]^T$.

4. Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = 2xy - y', \quad x \in \left[\frac{1}{2}, 5\right] \\ y(\frac{1}{2}) = 1, y'(\frac{1}{2}) = 2 \end{cases}$$

e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{2}$ per approssimare la sua soluzione in $x = 2$.

Soluzione. $\boldsymbol{\eta}_1 = (2, \frac{3}{2})^T$, $\boldsymbol{\eta}_2 = (\frac{11}{4}, -\frac{11}{4})^T$, $\boldsymbol{\eta}_3 = (\frac{33}{8}, -\frac{11}{2})^T$.

5. Identificare i due seguenti metodi alle differenze finite

$$\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{\alpha h}{\beta}\left[2f(x_k, \eta_k) - f\left(x_k + \frac{\beta}{3}h, \eta_k + \frac{\beta}{3}hf(x_k, \eta_k)\right)\right],$$

$$\eta_{k+1} = (3\gamma - 1)\,\eta_k - \left(2\gamma^2 - \gamma\right)\eta_{k-1} + \frac{h}{2}\left[f(x_k, \eta_k) + f(x_{k-1}, \eta_{k-1})\right].$$

Dire per quali valori dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ il primo metodo è stabile, per quali è convergente e per quali è del secondo ordine. Stabilire, inoltre, per quali valori di $\gamma \in \mathbb{R}$ il secondo metodo è stabile.

Soluzione. Il primo metodo è monostep, esplicito, a due stadi. Pertanto è stabile per $\beta \neq 0$. Esso è consistente, e quindi convergente, per ogni $\alpha = \beta \neq 0$; è di ordine 2 per $\alpha = \beta = -\frac{3}{2}$. Il secondo metodo è multistep, esplicito, a due passi. Esso è stabile quando $0 \leq \gamma < 1$.