Nome e matricola: ....
Corso di studi: ....

Prova scritta di Matematica Applicata
15 gennaio 2024

1. Si risolva mediante la fattorizzatione $PA = LU$ il sistema lineare

$$\begin{cases} 2x_2 + 5x_3 = -8 \\ x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 12 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 = 2 \\ 3x_1 + 6x_2 - 3x_4 = 12. \end{cases}$$

Si calcoli inoltre, mediante tale fattorizzazione, il determinante della matrice dei coefficienti del sistema.

Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = 144, \quad \mathbf{x} = [2, 1, -2, 0]^T.$$

2. Si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove

$$A = \begin{bmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Si stabilisca per quali valori del parametro a il sistema ammette un'unica soluzione e per quali valori la matrice è simmetrica definita positiva. Si studi inoltre, al variare del parametro a, la convergenza del metodo di Gauss-Seidel applicato a tale sistema. Si fissi $a = 4$ e si calcolino le prime due iterate del metodo di Jacobi a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 1, 1]^T$.

Soluzione. La matrice dei coefficienti è non singolare se $a \neq 0, \pm\sqrt{5}$, è simmetrica per ogni valore di a, definita positiva se $a > \sqrt{5}$. Il metodo di Gauss-Seidel converge per $a < -\sqrt{5}$ e $a > \sqrt{5}$. Le prime due iterate del metodo di Jacobi sono $\mathbf{x}^{(1)} = [-1/4, -1, 1/2]^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = [7/8, -7/8, 9/16]^T$.

3. Identificare i due seguenti metodi alle differenze finite

$$\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{\alpha h}{\beta}\left[2f(x_k,\eta_k) - f\left(x_k + \frac{\beta}{3}h, \eta_k + \frac{\beta}{3}hf(x_k,\eta_k)\right)\right],$$

$$\eta_{k+1} = (3\gamma - 1)\,\eta_k - \left(2\gamma^2 - \gamma\right)\eta_{k-1} + \frac{h}{2}\left[f(x_k,\eta_k) + f(x_{k-1},\eta_{k-1})\right].$$

Dire per quali valori dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ il primo metodo è stabile, per quali è convergente e per quali è del secondo ordine. Stabilire, inoltre, per quali valori di $\gamma \in \mathbb{R}$ il secondo metodo è stabile.

Soluzione. Il primo metodo è monostep, esplicito, a due stadi. Pertanto è stabile per $\beta \neq 0$. Esso è consistente, e quindi convergente, per ogni $\alpha = \beta \neq 0$; è di ordine 2 per $\alpha = \beta = -\frac{3}{2}$. Il secondo metodo è multistep, esplicito, a due passi. Esso è stabile quando $0 \leq \gamma < 1$.

4. Sviluppare in Serie di Fourier, la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} 2 + \frac{3}{5}x, & -5 \leq x < 0, \\ 2 - \frac{3}{5}x, & 0 \leq x < 5. \end{cases}$$

Soluzione.

$$S_f(x) = \frac{1}{2} + 6\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 + (-1)^{k+1})}{k^2\pi^2}\cos\left(\frac{k\pi}{5}x\right)$$

5. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$-3y' + y = H(x+7) - H(x+1), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Soluzione.

$$y(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{3}x}(e^{\frac{7}{3}} - e^{\frac{1}{3}}) & x < -7 \\ e^{\frac{1}{3}x}(e^{-\frac{1}{3}x} - e^{\frac{1}{3}}) & x \in [-7,-1] \\ 0 & x > -1 \end{cases}$$