Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di Matematica Applicata
30 gennaio 2024

1. Si calcoli la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

e la si utilizzi per calcolare la prima e l'ultima colonna della sua inversa e il suo determinante.

Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0/3 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A\mathbf{e}_1 = [0, -2, 0, 1]^T, \quad A\mathbf{e}_4 = [-1, 0, 1/2, 0]^T, \quad \det(A) = -16,$$

2. Si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2a & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2a \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Si stabilisca per quali valori del parametro a il sistema ammette un'unica soluzione e per quali valori la matrice è simmetrica definita positiva. Si studi inoltre, al variare del parametro a, la convergenza del metodo di Jacobi applicato a tale sistema. Si fissi $a = 1$ e si calcolino le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 0, 1, 0]^T$.

Soluzione. La matrice dei coefficienti è non singolare se $a \neq 0, \pm\sqrt{2}/2$, è simmetrica per ogni valore di a, definita positiva se $a > \sqrt{2}/2$. Il metodo di Jacobi converge per $a < -\sqrt{2}/2$ e $a > \sqrt{2}/2$. Le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel sono $\mathbf{x}^{(1)} = [1, 0, 1/2, 3/4]^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = [1, 1/4, 0, 1]^T$.

3. Identificare i due seguenti metodi alle differenze finite

$$\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{h}{3}\left[5f(x_k, \eta_k) - \alpha f\left(x_k + 2\beta h, \eta_k + 2\beta h f(x_k, \eta_k)\right)\right],$$
$$\eta_{k+1} = 2\eta_k - \left(1 - \gamma^2\right)\eta_{k-1} + \frac{h}{3}\left[f(x_k, \eta_k) + 2f(x_{k-1}, \eta_{k-1})\right].$$

Dire per quali valori dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ il primo metodo è stabile, per quali è convergente e per quali è del secondo ordine. Stabilire, inoltre, per quali valori di $\gamma \in \mathbb{R}$ il secondo metodo è stabile.

Soluzione. Il primo metodo è monostep, esplicito, a due stadi. Pertanto è stabile per ogni valore di α e β. Esso è consistente, e quindi convergente, per $\alpha = 2$ e per ogni β, è di ordine 2 per $\alpha = 2$ e $\beta = -\frac{3}{8}$. Il secondo metodo è multistep, esplicito, a due passi. Esso non è stabile per alcun valore di γ; si noti che per $\gamma = 0$ le due radici del suo polinomio caratteristico sono coincidenti.

4. Sviluppare in serie di Fourier, la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} -\cos(2x), & -\pi/4 \leq x < 0, \\ \cos(2x), & 0 \leq x < \pi/4. \end{cases}$$

Dire inoltre se la serie è differenziabile termine a termine e perché.

Soluzione. La serie non è differenziabile termine a termine in quanto la f non è continua nell'origine.

$$S_f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8k}{\pi(4k^2 - 1)} \sin(4kx).$$

5. Eseguire la seguente antitrasformata

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\sin 3k}{k(1 - 2\mathrm{i}k)}\right\}.$$

Soluzione.

$$y(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(x+3)} - \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(x-3)}, & x < -3, \\ 1 - \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(x-3)}, & -3 \leq x < 3, \\ 0, & x \geq 3. \end{cases}$$