Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di Matematica Applicata

19 febbraio 2024

1. Si calcoli la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

e la si utilizzi per calcolare la prima colonna della sua inversa, il suo determinante e la soluzione del sistema $Ax = b$ con $b = [1, 6, 3, 0]^T$.

Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/6 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 11/6 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A\mathbf{e}_1 = [-2, 1, 0, 0]^T, \quad \mathbf{x} = [1, 1, 0, 0]^T, \quad \det(A) = 11.$$

2. Si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & a & 2 & 8 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Si stabilisca per quali valori del parametro a il sistema ammette un'unica soluzione e si studi, al variare del parametro a, la convergenza del metodo di Jacobi applicato a tale sistema. Si fissi $a = 1$ e si calcolino le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 0, 1, 0]^T$.

Soluzione. La matrice dei coefficienti è non singolare se $a \neq 0$ e il metodo di Jacobi converge per ogni valore di a. Le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel sono $\mathbf{x}^{(1)} = [1/2, 1, -1, 1/8]^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = [1/2, 7/8, -1, 9/64]^T$.

3. Trasformare il seguente problema del second'ordine

$$\begin{cases} y''(x) = 3 - \dfrac{x}{2 + yy'} \\ y(1/2) = -1, \; y'(1/2) = 1 \end{cases}$$

in un sistema del prim'ordine e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{2}$ per approssimare la sua soluzione in $x = 3/2$.

Soluzione. $\boldsymbol{\eta}_1 = (-\frac{1}{2}, \frac{9}{4})^T$, $\boldsymbol{\eta}_2 = (\frac{5}{8}, \frac{89}{28})^T$.

4. Sviluppare in serie di Fourier, la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} -x-2, & -2 \leq x < -1, \\ x, & -1 \leq x < 1, \\ -x+2 & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Dire inoltre se la serie è differenziabile termine a termine e perché.

Soluzione. La serie è differenziabile termine a termine poichè f è continua in $[-2, 2]$, $f(2) = f(-2)$, e f' è regolare a tratti. La serie cercata è

$$S_f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{k^2\pi^2} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{k\pi}{2}x\right).$$

5. Eseguire i seguenti calcoli

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\sin 3x}{x\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}} \cos 3x\right\}, \qquad \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{k^2+3\mathrm{i}k+10}\right\}.$$

Soluzione.

$$F(k) = \frac{\pi}{2}[H(3-k) - H(-k-9)],$$

$$f(x) = \frac{1}{7}[e^{-2x}H(x) + e^{5x}H(-x)].$$