

Tutorato di Matematica Applicata

Corso di Laurea Triennale in Ingegneria Biomedica e Ingegneria Chimica

Esercitazione 10 (23/12/2021)

1. Classificare il seguente metodo alle differenze finite

$$\begin{cases} \eta_{i+1} = \eta_i + \frac{h}{7} [\alpha f(x_i, \eta_i) + f(x_i + \alpha\beta h, \eta_i + \alpha\beta h f(x_i, \eta_i))] \\ \eta_0 = y_0 \end{cases}$$

e discuterne la convergenza al variare dei parametri reali α e β .

SOLUZIONE.

Il metodo dato rappresenta una formula monostep esplicita a 2 stadi. Il metodo è consistente, e quindi convergente, quando $\alpha = 6$ ed è del secondo ordine per $\alpha = 6$ e $\beta = 7/12$.

2. Si classifichi e si studi la stabilità, la consistenza e la convergenza del seguente schema alle differenze finite

$$\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{h}{5} \left[3f(x_k, \eta_k) + 2f\left(x_k + \frac{5}{4}h, \eta_k + \frac{5}{4}hf(x_k, \eta_k)\right) \right].$$

Si classifichi e si studi, inoltre, al variare del parametro reale δ la stabilità del seguente schema numerico

$$\eta_{k+1} = \frac{1}{2}(\delta + 1)\eta_k - \frac{\delta}{4}\eta_{k-1} + 2hf(x_k, \eta_k).$$

SOLUZIONE.

Il primo schema alle differenze finite è monostep esplicito ed è stabile e consistente del secondo ordine e quindi convergente di ordine 2. Il secondo schema è di tipo multistep esplicito ed è stabile per $-2 \leq \delta \leq 2$.

3. Dopo aver classificato i seguenti metodi alle differenze finite

(a) $\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{\alpha}{\beta}h \left[3f(x_k, \eta_k) + 4f\left(x_k + \beta h, \eta_k + \beta hf(x_k, \eta_k)\right) \right],$

(b) $\eta_{k+1} = -\gamma\eta_k + (1 - \gamma)\eta_{k-1} + 2hf(x_k, \eta_k),$

si determinino i valori dei parametri reali α , β e γ che rendono stabili entrambi gli schemi. Si dica inoltre quali valori dei parametri coinvolti garantiscono per il metodo monostep il massimo ordine di convergenza.

SOLUZIONE.

Lo schema (a) è monostep esplicito ed è stabile per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ e per ogni $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ha ordine di convergenza massimo (pari a 2) se $\alpha = \frac{1}{8}$ e $\beta = \frac{7}{8}$.

Lo schema (b) è multistep esplicito ed è stabile per $0 \leq \delta < 2$.