Tutorato di Matematica Applicata

Corso di Laurea Triennale in Ingegneria Biomedica e Ingegneria Chimica

Esercitazione 11 (03/01/2022)

1. Si considerino le seguenti matrici

$$A = I4\mathbf{w}\mathbf{w}^T, \quad B = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & \alpha & -2 \\ \alpha & 3 & \alpha \\ -2 & \alpha & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{\beta}{2} \\ 0 & -\frac{\beta}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dove $\mathbf{w} = [\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]^T$. Si determinino i valori del parametro α che rendono B l'inversa di A e si calcoli l'indice di condizionamento della matrice A in norma ∞, 1 e 2. Si dica, inoltre, sulla base dei calcoli fatti e motivando la risposta se A è definita positiva. Si calcolino, infine, i valori di β che rendono C una matrice ortogonale e, fissato uno di questi, si risolva nel modo più conveniente il sistema lineare $C\mathbf{x} = \mathbf{w}$.

SOLUZIONE.

B è l'inversa di A se $\alpha = 2$, $k_\infty(A) = k_1(A) = 7$, $k_2(A) = 5$. A non è definita positiva. C è ortogonale se $\beta = \pm\sqrt{3}$.

$\mathbf{x} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right]^T$ per $\beta = \sqrt{3}$ mentre per $\beta = -\sqrt{3}$ si ha $\mathbf{x} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4}, -\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right]^T$.

2. Sia A la matrice dei coefficienti del seguente sistema

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = 1 \\ -x_1 + x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

Risolvere, mediante la fattorizzazione $PA = LU$, il sistema lineare dato e calcolare la seconda colonna dell'inversa della matrice A. Si calcoli inoltre il determinante di A.

SOLUZIONE.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = (4,5,3,7)^T, \quad A^{-1}\mathbf{e}_2 = (-2,-3,-1,-4)^T, \quad \det(A) = -1$$

3. Si consideri il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} 2x_1 + \alpha x_2 + x_3 = 1 \\ \alpha x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

dove α è un parametro reale. Stabilire per quali valori del parametro la matrice dei coefficienti del sistema è invertibile, per quali è definita positiva e per quali il metodo di Jacobi applicato al sistema converge. Posto poi $\alpha = 1$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel a partite da un vettore $\mathbf{x}^{(0)}$ non nullo. Senza fare calcoli e motivando opportunamente la risposta, si dica se nel caso $\alpha = \frac{1}{2}$ il metodo di Gauss-Seidel converge.

SOLUZIONE.

A è invertibile per $\alpha \neq \pm 1$ ed è definita positiva per $-\sqrt{3} < \alpha < \sqrt{3}$. Il metodo di Jacobi converge per $-\sqrt{3} < \alpha < \sqrt{3}$. Prendendo, ad esempio, come $\mathbf{x}^{(0)} = (1,0,0)^T$, le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel sono

$$\mathbf{x}^{(1)} = (1/2, 1/4, 1/4)^T, \quad \mathbf{x}^{(2)} = (1/4, 3/8, 3/8)^T.$$

Per $\alpha = \frac{1}{2}$, il metodo di Gauss-Seidel converge perchè...

4. Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y''(x) = x/y - y', \quad x \in [1,4] \\ y(1) = 1, \quad y'(1) = 0 \end{cases}$$

e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{2}$ per approssimare la sua soluzione in $x = \frac{5}{2}$.

SOLUZIONE.

$$\boldsymbol{\eta}_1 = (1, 1/2)^T, \quad \boldsymbol{\eta}_2 = (5/4, 1)^T, \quad \boldsymbol{\eta}_3 = (7/4, 13/10)^T$$

5. Si classifichino i seguenti metodi alle differenze finite

   (a) $\eta_{k+1} = \eta_k + h\big[(\frac{1}{2} - \delta^2) f(x_k, \eta_k) + \frac{3\delta}{2} f(x_k + h, \eta_k + h f(x_k, \eta_k))\big]$,

   (b) $\eta_{k+1} = (2\delta - \frac{5}{4}\eta_k - (\delta - 1)(\delta - \frac{1}{4}\eta_{k-1} + 2h(\delta + 1) f(x_k, \eta_k)$

   Si determinino i valori di $\delta \in \mathbb{R}$ che, oltre a rendere stabili entrambi i metodi, garantiscono un ordine di convergenza pari a 1 nel metodo monostep.

   SOLUZIONE.

   Lo schema (a) è monostep esplicito ed è stabile per ogni $\delta \in \mathbb{R}$ e ha ordine di convergenza pari a 1 se $\delta = 1$ oppure $\delta = 1/2$. Lo schema (b) è multistep esplicito ed è stabile per $0 \leq \delta \leq 5/4$.