

Tutorato di Matematica Applicata

Corso di Laurea Triennale in Ingegneria Biomedica e Ingegneria Chimica

Esercitazione 12 (07/01/2022)

Gli esercizi sono estratti dalla prova totale del 22/02/2021

1. Sviluppare in serie di Fourier la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 3 & x \in [-1/2, 0) \\ 1 - x & x \in [0, 1/2) \end{cases}$$

Si dica inoltre se la serie trovata è differenziabile termine a termine.

2. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo $[-\infty, \infty]$

$$y'' - 3y' + 2y = \delta(x - 3), \quad x \in \mathbb{R}.$$

3. Determinare la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

e calcolare, mediante tale fattorizzazione, il determinante della matrice A , la prima e la terza colonna dell'inversa di A e la soluzione del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} = (2, 1, 0)^T$.

4. Sia β un parametro reale e si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \beta \\ 0 & \beta & 0 \\ \beta & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si dica per quali valori di β il metodo iterativo di Gauss-Seidel e di Jacobi risulta convergente se applicato al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} = (1, 1, 1)^T$. Fissato $\beta = 1/2$, si calcolino le prime due iterate di entrambi i metodi considerando come punto iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0)^T$.

5. Si consideri il seguente metodo alle differenze finite

$$\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{h}{3}[f(x_k, \eta_k) + 2f(x_k + h, \eta_k + hf(x_k, \eta_k))],$$

Si stabilisca una sua classificazione e si dica se è del secondo ordine. Si applichi, inoltre, tale schema al seguente problema di Cauchy per approssimare la soluzione nel punto $x = 1/2$ con $h = 1/2$

$$\begin{cases} y'(x) = 3x, & x \in [0, 2] \\ y(0) = 0 \end{cases}$$