Tutorato di Matematica Applicata

Corso di Laurea Triennale in Ingegneria Biomedica e Ingegneria Chimica

Esercitazione 1 (07/10/2021)

1. Date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1/5 \\ 1/3 & 0 & 3 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 5 \\ 3 & -4 \\ -5/2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 2i & 0 & 1-i \\ 2 & 3+i & 0 \\ -1+i & 1 & -1+2i \end{bmatrix}$$

si calcoli il prodotto $A^T B$ e l'aggiunta della matrice C .

SOLUZIONE.

$$A^T B = \begin{bmatrix} -46/3 & 47/3 \\ 7 & 2 \\ 83/10 & 81/5 \end{bmatrix}, \quad C^* = \begin{bmatrix} -2i & 2 & -1-i \\ 0 & 3-i & 1 \\ 1+i & 0 & -1-2i \end{bmatrix}$$

2. Si considerino i seguenti vettori

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Si dica se $\mathbf{v}_3$ è ortogonale ai vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ e se è un vettore normalizzato rispetto alla norma ∞ e alla norma 1. Si costruisca mediante il procedimento di Gram-Schmidt l'insieme di vettori ortonormali $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3\}$ a partire dai vettori dati.

Si dica, motivando opportunamente la risposta e senza fare calcoli, quali sono gli autovalori della matrice $C = Q^T Q$ dove $Q = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3]$.

SOLUZIONE.

$\mathbf{v}_3$ non è ortogonale a $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ ed è normalizzato solo rispetto alla norma con indice ∞ . I vettori ortonormali richiesti sono

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_3 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Essendo Q ortogonale, gli autovalori di C sono tutti pari a 1.

3. Si considerino le matrici $A = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$ e $B = [\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$ dove $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ sono i vettori definiti nell'esercizio precedente. Si dica se le matrici $C_1 = AA^T$, $C_2 = A^T A$ e $C_3 = B^T B$ sono singolari. Si determinino spettro e raggio spettrale di C_1 . Si considerino poi le seguenti matrici

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \alpha \end{bmatrix}, \quad E_2 = \beta \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

dove α e β sono due parametri reali. Si dica quale è il valore del parametro α che rende E_1 l'inversa della matrice C_2 e quale è il valore del parametro β che rende E_2 l'inversa della matrice C_3 . Infine, motivando opportunamente la risposta si calcoli l'inversa della matrice $P = C_2 C_3^T$. *Suggerimento: nel calcolo del polinomio caratteristico, si consiglia di esplicitare tutti i termini.*

SOLUZIONE.

C_1 è singolare mentre C_2 e C_3 non lo sono.

$$\sigma(C_1) = \left\{ 0, \frac{5 - \sqrt{17}}{2}, \frac{5 + \sqrt{17}}{2} \right\}, \quad \rho(C_1) = \frac{5 + \sqrt{17}}{2}.$$

E_1 e C_2 sono una l'inversa dell'altra se $\alpha = \frac{3}{2}$ mentre E_2 è l'inversa di C_3 per $\beta = \frac{1}{3}$,

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

4. **NB: l'esercizio sarà corretto durante la prossima esercitazione.**

Si considerino le seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \beta \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha & -\alpha \\ 0 & 1 & \alpha \\ \alpha & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dove α e β sono parametri reali. Si determinino i valori del parametro β che rendono la matrice B l'inversa della matrice A e i valori del parametro α che rendono C una matrice non singolare. Si consideri poi la matrice $D = A + C$ e si stabilisca per quali valori del parametro α la matrice D è ortogonale. Fissato tale valore, si calcolino spettro e raggio spettrale di D . Motivando opportunamente la risposta, si indichi spettro e raggio spettrale di D^{-1} .

SOLUZIONE.

B coincide con A^{-1} se $\beta = 1/2$. C è non singolare per ogni valore del parametro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. D è ortogonale per $\alpha = -1$, $\sigma(D) = \sigma(D^{-1}) = \{-1, 1, 1\}$, $\rho(D) = \rho(D^{-1}) = 1$.