Tutorato di Matematica Applicata

Corso di Laurea Triennale in Ingegneria Biomedica e Ingegneria Chimica

Esercitazione 2 (14/10/2021)

1. Si considerino le seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \beta \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha & -\alpha \\ 0 & 1 & \alpha \\ \alpha & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dove α e β sono parametri reali. Si determinino i valori del parametro β che rendono la matrice B l'inversa della matrice A e i valori del parametro α che rendono C una matrice non singolare. Si consideri poi la matrice $D = A + C$ e si stabilisca per quali valori del parametro α la matrice D è ortogonale. Fissato tale valore, si calcolino spettro e raggio spettrale di D. Motivando opportunamente la risposta, si indichi spettro e raggio spettrale di D^{-1}.

SOLUZIONE.

B coincide con A^{-1} se $\beta = 1/2$. C è non singolare per ogni valore del parametro $\alpha \in R\ 0, 1$. D è ortogonale per $\alpha = -1$, $\sigma(D) = \sigma(D^{-1}) = \{-1, 1, 1\}$, $\rho(D) = \rho(D^{-1}) = 1$.

2. Dati

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ i \\ 1+i \end{bmatrix}$$

si calcoli la norma 1,2 e ∞ di $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$.

SOLUZIONE.

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2+i \\ 3+4i \\ 1+2i \end{bmatrix}, \quad \|\mathbf{y}\|_1 = 2\sqrt{5} + 5, \quad \|\mathbf{y}\|_2 = \sqrt{35}, \quad \|\mathbf{y}\|_\infty = 5.$$

3. Si indichino autovalori, raggio spettrale e determinante della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

SOLUZIONE.

$$\sigma(A) = \{3, 3 \pm \sqrt{3}i\}, \quad \rho(A) = \sqrt{12}, \quad \det(A) = 36.$$

4. Sviluppare in serie di Fourier la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -4 \leq x < 0 \\ 2x & 0 \leq x < 4 \end{cases}$$

SOLUZIONE.

$a_0 = 2, \quad a_k = \frac{8}{(k\pi)^2}\big[(-1)^k - 1\big], \quad b_k = -\frac{8}{k\pi}(-1)^k \quad \text{con} \quad k = 1, 2, \ldots$

$$S_f(x) = 2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{k\pi}\Big\{\frac{1}{k\pi}\big[(-1)^k - 1\big]\cos(k\frac{\pi}{4}x) - (-1)^k \sin(k\frac{\pi}{4}x)\Big\}$$