Tutorato di Matematica Applicata

Corso di Laurea Triennale in Ingegneria Biomedica e Ingegneria Chimica

Esercitazione 8 (09/12/2021)

1. Data la matrice
$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$
se ne calcoli il numero di condizionamento in norma 2 al variare del parametro reale α.

   SOLUZIONE.

$$k_2(A) = \begin{cases} \frac{3+2\sqrt{2}}{|\alpha|} & \text{se} \quad |\alpha| < 3-2\sqrt{2} \\ \frac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}} & \text{se} \quad 3-2\sqrt{2} < |\alpha| < 3+2\sqrt{2} \\ \frac{|\alpha|}{3-2\sqrt{2}} & \text{se} \quad |\alpha| > 3+2\sqrt{2} \end{cases}$$

2. Sia A la matrice dei coefficienti del sistema lineare
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 7x_4 = 1 \\ x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 0 \end{cases}$$
Risolvere, mediante la fattorizzazione $PA = LU$, il sistema lineare dato e calcolare la seconda colonna dell'inversa della matrice A. Si calcoli inoltre il determinante di A.

   SOLUZIONE.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1/9 & 1 & 0 \\ 1 & 2/3 & -3/28 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 9 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 28/9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3/7 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = [1, -1/6, -2, 11/6]^T, \quad A^{-1}\mathbf{e}_2 = [-1/2, -1/4, 0, 1/4]^T$$

3. Sia

$$A = \begin{bmatrix} \gamma & 1 & 0 \\ 2 & \gamma & 2 \\ 0 & 1 & \gamma \end{bmatrix}$$

Stabilire per quali valori del parametro γ la matrice A è invertibile e per quali i suoi autovalori sono positivi. Si consideri poi il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} = [1 \quad 0 \quad 3]^T$. Si studi al variare del parametro γ la convergenza del metodo di Jacobi applicato a tale sistema e si calcolino le prime due iterate partendo dal vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = [0 \quad 1 \quad 1]^T$.

<u>SOLUZIONE.</u>

A è invertibile per $\gamma \neq 0, \pm 2$, i suoi autovalori sono positivi per $\gamma > 2$. Il metodo di Jacobi risulta convergente se e solo se $\gamma > 2$ oppure $\gamma < -2$. Le prime due iterate del metodo sono:

$$\mathbf{x}^{(1)} = \left[0, -\frac{2}{\gamma}, \frac{2}{\gamma}\right]^T, \quad \mathbf{x}^{(2)} = \left[\frac{2+\gamma}{\gamma^2}, -\frac{4}{\gamma^2}, \frac{2+3\gamma}{\gamma^2}\right]^T$$