# Tutorato di Matematica Applicata

Corso di Laurea Triennale in Ingegneria Biomedica e Ingegneria Chimica

## Esercitazione 9 (21/12/2021)

1. Sia
$$A = \begin{bmatrix} \gamma & 1 & 0 \\ 2 & \gamma & 2 \\ 0 & 1 & \gamma \end{bmatrix}$$

   Stabilire per quali valori del parametro $\gamma$ la matrice $A$ è invertibile e per quali i suoi autovalori sono positivi. Si consideri poi il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} = [1 \quad 0 \quad 3]^T$. Si studi al variare del parametro $\gamma$ la convergenza del metodo di Jacobi applicato a tale sistema e si calcolino le prime due iterate partendo dal vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = [0 \quad 1 \quad 1]^T$.

   **SOLUZIONE.**

   A è invertibile per $\gamma \neq 0, \pm 2$, i suoi autovalori sono positivi per $\gamma > 2$. Il metodo di Jacobi risulta convergente se e solo se $\gamma > 2$ oppure $\gamma < -2$. Le prime due iterate del metodo sono:
$$\mathbf{x}^{(1)} = \left[0, -\frac{2}{\gamma}, \frac{2}{\gamma}\right]^T, \quad \mathbf{x}^{(2)} = \left[\frac{2+\gamma}{\gamma^2}, -\frac{4}{\gamma^2}, \frac{2+3\gamma}{\gamma^2}\right]^T$$

2. Data la matrice
$$A = \begin{bmatrix} 2\alpha & -1 & 0 \\ -1 & 2\alpha & -1 \\ 0 & -1 & 2\alpha \end{bmatrix},$$

   stabilire per quali valori $A$ è definita positiva e per quali valori del parametro reale $\alpha$ il metodo di Gauss-Seidel, applicato al sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, risulta convergente. Fissato un tale valore, calcolare le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel considerando termine noto e vettore iniziale
$$\mathbf{b} = [2, 3, 4]^T, \quad \mathbf{x}^{(0)} = [0, 1, 0]^T.$$

   **SOLUZIONE.**

   Il metodo di Gauss-Seidel converge per $\alpha < -\frac{\sqrt{2}}{2} \wedge \alpha > \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ponendo, ad esempio, $\alpha = 1$, le prime due iterate sono
$$\mathbf{x}^{(1)} = [3/2, 9/4, 25/8]^T, \quad \mathbf{x}^{(2)} = [9/8, 17/8, 17/16]^T.$$

3. Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = 3xy - y', \quad x \in \left[\frac{2}{3}, 5\right] \\ y\left(\frac{2}{3}\right) = -1, y'\left(\frac{2}{3}\right) = 0 \end{cases}$$

e utilizzare il metodo e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{3}$ per approssimare la sua soluzione in $x = \frac{4}{3}$.

<u>**SOLUZIONE.**</u>

$$\eta_1 = (-1, -2/3), \quad \eta_2 = (-11/9, -13/9)$$

4. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = y - 1, \quad x \in [1, \infty) \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

si approssimi la soluzione in $x = 2$ mediante il seguente metodo

$$\eta_{k+1} = \eta_k + h\Big[f(x_k, \eta_k) + 2f\Big(x_k + \frac{h}{4}, \eta_k + \frac{h}{4}f(x_k, \eta_k)\Big)\Big]$$

con passo $h = \frac{1}{2}$.

<u>**SOLUZIONE.**</u>

$$\eta_1 = -\frac{13}{8}, \quad \eta_2 = -\frac{377}{64}$$