

TUTORATO DELLE LEZIONI DI MATEMATICA APPLICATA

A.A. 2022/2023

DOCENTE: PROF.SSA LUISA FERMO

TUTOR: DOTT. VALERIO LOI

Esercitazione di riepilogo

1. Si consideri la matrice $A = I - \rho \mathbf{w} \mathbf{w}^T$ dove $\mathbf{w} = [-1, 1, 1]^T$ e $\rho = \frac{2}{\mathbf{w}^T \mathbf{w}}$. Si dica se la matrice A è simmetrica e/o ortogonale. Si calcoli poi il condizionamento in norma 1, 2 e ∞ della matrice e si risolva nel modo più efficiente possibile, motivando la risposta, il sistema $A^3 \mathbf{x} = \mathbf{w}$. Teoricamente cosa si può dire sul determinante di A^2 ?
2. Si risolva mediante la fattorizzazione $PA = LU$ il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -4 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -6 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$$

3. Si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove

$$A = \begin{bmatrix} \gamma & 1 & 0 \\ 2 & \gamma & 1 \\ 0 & 2 & \gamma \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si stabilisca per quali valori del parametro γ la matrice A è invertibile e si studi al variare del parametro γ la convergenza del metodo di Gauss-Seidel applicato a tale sistema. Posto $\gamma = 4$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Jacobi, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [0 \ 1 \ 0]^T$. Infine si dica, motivando la risposta, se nel caso in cui $\gamma = 10$ si possono trarre a priori conclusioni sulla convergenza dei metodi esaminati.

4. Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = xy - x^2 y', & x \in [2, 5] \\ y(2) = 0, y'(2) = 1 \end{cases}$$

e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{2}$ per approssimare la sua soluzione sui primi due punti della discretizzazione risultante.

5. Si consideri il seguente schema alle differenze finite dove α, β sono due parametri reali positivi

$$\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{2}{\alpha - 1} h \left[f(x_k, \eta_k) + f \left(x_k + \frac{\beta^2}{2} h, \eta_k + \frac{\beta^2}{2} h f(x_k, \eta_k) \right) \right].$$

Si dica per quali valori di α e β il metodo è stabile, per quali è convergente del primo ordine e per quali è convergente del secondo ordine. Stabilire, inoltre, al variare di $\gamma \in \mathbb{R}$, se il seguente metodo multistep è stabile

$$\eta_{k+1} = (1 + \gamma)\eta_k + h \left[(1 + \gamma^2)f(x_k, \eta_k) + (\gamma - 1)f(x_{k-1}, \eta_{k-1}) \right].$$

6. Eseguire i seguenti calcoli:

$$\mathcal{F} \left\{ H(x-3)e^{-x} * \frac{1}{2}e^{-4x^2} \right\}, \quad \mathcal{F} \{ (2x+3)H(x)e^{-x} \}.$$

dove $H(x)$ denota la funzione di Heaviside.

7. Sviluppare in serie di Fourier la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \in [-2, 0), \\ 2x - 1, & x \in [0, 2]. \end{cases}$$