

TUTORATO DELLE LEZIONI DI
MATEMATICA APPLICATA

A.A. 2022/2023

DOCENTE: PROF.SSA LUISA FERMO

TUTOR: VALERIO LOI

Esercitazione 4

Serie di Fourier ed equazioni differenziali ordinarie

Esercizio 1

Si risolva la seguente equazione differenziale ricorrendo alla serie di Fourier:

$$y'' - 4y' + 3y = |x - 1|, \quad -\pi \leq x \leq \pi,$$

si dica inoltre se la serie del termine noto è differenziabile termine a termine.

Esercizio 2

Si risolva la seguente equazione differenziale ricorrendo alla serie di Fourier:

$$y'' - 4y = \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right), \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2},$$

si dica inoltre se la serie del termine noto è differenziabile termine a termine.

Esercizio 3

Si risolva la seguente equazione differenziale ricorrendo alla serie di Fourier:

$$y' - y = f(x), \quad -4 \leq x \leq 4,$$

dove

$$f(x) = \begin{cases} x + 4 & \text{se } -4 \leq x \leq 0 \\ x - 4 & \text{se } 0 < x \leq 4. \end{cases}$$

SOLUZIONI:

Esercizio 1

$$a_0 = -\frac{1 + \pi^2}{6\pi}, \quad a_k = \frac{(3 - k^2)\bar{a}_k + 4k\bar{b}_k}{k^4 + 10k^2 + 9}.$$
$$b_k = \frac{(3 - k^2)\bar{b}_k - 4k\bar{a}_k}{k^4 + 10k^2 + 9},$$

essendo

$$\bar{a}_k = 2 \frac{(-1)^k - \cos(k)}{\pi k^2}$$

$$\bar{b}_k = \frac{2}{\pi} \left(\frac{(-1)^k}{k} - \frac{\sin(k)}{k^2} \right).$$

Esercizio 2

$$b_k = 0;$$

$$a_0 = -\frac{3}{2\pi} \sin\left(\frac{\pi^2}{6}\right), \quad a_k = -\frac{12 \sin\left(\frac{\pi^2}{2}\right) (-1)^k}{4(k^2 + 1)(\pi^2 - 36k^2)}.$$

Esercizio 3

$$a_0 = 0, \quad b_k = -\frac{4\pi k \bar{b}_k}{\pi^2 k^2 + 16}$$

$$b_k = -\frac{16 \bar{b}_k}{\pi^2 k^2 + 16},$$

essendo

$$\bar{b}_k = -\frac{8}{k\pi}.$$