Tutorato delle lezioni di
MATEMATICA APPLICATA
A.A. 2022/2023
docente: Prof.ssa Luisa Fermo
tutor: Dott. Valerio Loi

Esercitazione 9 del 21/12/2022
Metodi numerici per equazioni differenziali ordinarie

Esercizio 1

Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = xy' - 3y \quad x \in [-2, 2] \\ y(-1) = \frac{1}{2}, y'(-1) = 1 \end{cases}$$

e approssimare la soluzione in $x = 0$ mediante il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{2}$.

Esercizio 2

Si classifichino i seguenti metodi alle differenze finite:

(a) $\eta_{k+1} = \eta_k + \dfrac{h}{(\alpha - 3)} \left[f(x_k, \eta_k) + 2f\left(x_k + 2\beta h, \eta_k + 2\beta h f(x_k, \eta_k)\right)\right],$

(b) $\eta_{k+1} = (\gamma + 1)\eta_k - \gamma\eta_{k-1} + 2h(\gamma + 1)f(x_k, \eta_k).$

Si determinino i valori dei parametri $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ che rendono stabili entrambi gli schemi. Si dica inoltre quali valori dei parametri coinvolti garantiscono un ordine di convergenza pari a 2 nel metodo monostep.

Esercizio 3 Si classifichi il seguente schema alle differenze finite e si studi stabilità, consistenza e convergenza

$$\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{3h}{4}\left[f(x_k, \eta_k) + \frac{1}{3} f\left(x_k + \frac{2}{3}h, \eta_k + \frac{2}{3}hf(x_k, \eta_k)\right)\right].$$

Considerato poi il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 2y - x, \quad x \in [0, 1], \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

si calcoli la soluzione approssimata nel punto $x = 1$ mediante il metodo alle differenze introdotto in precedenza, nel caso in cui $h = \frac{1}{2}$.