Tutorato delle lezioni di
MATEMATICA APPLICATA
Corsi di Laurea in Chimica e Meccanica
A.A. 2016/2017
docente: Dott.ssa Luisa Fermo
tutor: Dott. Francesco Arrai

Esercitazione 11 del 10/01/2017, ore 14:00-16:00 Aula C
Riepilogo argomenti II parte

Esercizio 1[tratto dal recupero della II prova intermedia del 31/01/2014]
Assegnate le matrici

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 6 & 2 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} b & 0 & 0 & 0 \\ -b & b & 0 & 0 \\ b & -1 & b & 0 \\ -b & -a & a & b \end{bmatrix},$$

determinare i valori dei parametri a e b che rendono la matrice M l'inversa di L. Dopo avere sostituito i valori di a e b trovati, calcolare il condizionamento rispetto alle norme con indice 1 e ∞ delle matrici L, M e $A = L^T L$. Dire infine quali sono gli autovalori di L e di L^3 e, posti $a = 1$ e $b = 0$, calcolare $\|M\|_2$.
Esercizio 2
Risolvere mediante la fattorizzazione $PA = LU$ il sistema lineare

$$\begin{cases} 4x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -2 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_4 = 8 \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + -x_2 + 5x_3 - 3x_4 = -7 \end{cases}$$

e calcolare il determinante della matrice dei coefficienti.

Esercizio 3
Assegnati

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 2 & 0 \\ \alpha & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix},$$

dire per quali valori del parametro α la matrice A è invertibile, per quali risulta definita positiva e per quali valori il metodo iterativo di Jacoby applicato al sistema risulta convergente. Fissato $\alpha = 1$, calcolare le prime due iterazioni del metodo, a partire dal vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0)^T$.

Esercizio 4
Applicare al sistema dell'esercizio precedente il metodo di Gauss-Seidel.

Esercizio 5
Trasformare il seguente problema del secondo ordine

$$\begin{cases} y'' = 3y' - 2y \\ y(0) = 1, \; y'(0) = 0 \end{cases}$$

in un sistema del primo ordine e calcolare i primi due passi $\{\eta_1, \eta_2\}$ del metodo di Eulero utilizzando il passo $h = 1/2$.

Esercizio 6
Dire per quali valori dei parametri $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente metodo alle differenze finite è stabile, per quali è convergente e per quali è del secondo ordine

$$\eta_{k+1} = \eta_k + h\left[\alpha f(x_k, \eta_k) + (1-\alpha) f(x_k + h, \eta_k + h f(x_k, \eta_k))\right].$$

Stabilire, inoltre, per quali dei valori di $\gamma = 1, 2, 3$ il seguente metodo multistep è stabile

$$\eta_{k+2} = \frac{\gamma}{2}\eta_{k+1} + (2-\gamma)\eta_k + 2hf(x_k, \eta_k).$$

Esercizio 7
Si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2\beta & 0 \\ -2 & -2\beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si calcoli per quali valori di β la seguente matrice è singolare e fissato $\beta = 2$, si calcoli il suo indice di condizionamento in norma 1, 2 e ∞.