TUTORATO DELLE LEZIONI DI
MATEMATICA APPLICATA
A.A. 2017/2018

DOCENTE: DOTT.SSA LUISA FERMO
TUTOR: DOTT. MASSIMILIANO VENTRONI

Esercitazione 6 del 10/11/2017
Esercizi di riepilogo

Esercizio 1 [tratto dalla prova d'esame del 31 gennaio 2017]

Assegnate le matrici

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{7}{25} & 0 & -\frac{24}{25} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{24}{25} & 0 & -\frac{7}{25} \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 6 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \end{bmatrix},$$

verificare che Q è ortogonale, calcolare le matrici $A = QL$, $B = LL^T$ e determinare i valori di α e β che rendono M l'inversa di L. Calcolare quindi, nel modo più efficiente, i determinanti e le inverse di A e di B.

Soluzione. $\alpha = 2$ e $\beta = 3$, $\det A = -1$, $\det B = 1$,

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{137}{25} & \frac{72}{25} & -\frac{24}{25} \\ -2 & 1 & 0 \\ -\frac{66}{25} & \frac{21}{25} & -\frac{7}{25} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 6 \\ -2 & 5 & -15 \\ 6 & -15 & 46 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = MQ^T = \begin{bmatrix} \frac{7}{25} & 0 & -\frac{24}{25} \\ \frac{14}{25} & 1 & -\frac{48}{25} \\ -\frac{24}{25} & 3 & -\frac{7}{25} \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = M^T M = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 10 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 2

Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo $[-\pi, +\pi]$

$$3y' - y = xH(x) + sin(x)H(-x)$$

dove $H(x)$ denota la funzione di Heaviside.

Soluzione.

$$S_f(x) = \frac{\pi^2 - 4}{4\pi} - \frac{2}{\pi}\cos x + \frac{3}{2}\sin x$$
$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(1-2k^2)(-1)^k - 1}{\pi k^2(1-k^2)} \cos(kx) - \frac{(-1)^k}{k} \sin(kx)$$

$$S_y(x) = \left(\frac{4-\pi^2}{4\pi}\right) + \left(\frac{4+9\pi}{20\pi}\right)\cos x - \left(\frac{12+3\pi}{20\pi}\right)\sin x$$
$$+ \sum_{k=2}^{\infty} \left[\frac{1-(-1)^k[1-k^2(2+3\pi(1-k^2))]}{\pi k^2(1-k^2)(1+9k^2)}\right]\cos(kx)$$
$$+ \left[\frac{[\pi(1+k^2)+3(1-2k^2)](-1)^k-3}{\pi k(1-k^2)(1+9k^2)}\right]\sin(kx)$$

Esercizio 3

Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo $(-\infty, +\infty)$

$$3y'' - y = H(x+2\pi) - H(x-2\pi)$$

dove $H(x)$ denota la funzione di Heaviside.

Soluzione.

$$y(x) = \begin{cases} e^{-\left(\frac{x+2\pi}{\sqrt{3}}\right)} - e^{-\left(\frac{x-2\pi}{\sqrt{3}}\right)}, & x > 2\pi \\ e^{-\left(\frac{x+2\pi}{\sqrt{3}}\right)} + e^{-\left(\frac{x-2\pi}{\sqrt{3}}\right)} - 2, & x \in [-2\pi,\, 2\pi] \\ e^{\left(\frac{x-2\pi}{\sqrt{3}}\right)} - e^{\left(\frac{x+2\pi}{\sqrt{3}}\right)}, & x < -2\pi \end{cases}$$

Esercizio 4

Eseguire i seguenti calcoli

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{(1+ik)(1-ik)}\right\}, \qquad \mathcal{F}\left\{2xe^{-2x}H(x-3)\right\}$$

Soluzione.

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|} = \frac{1}{2}\left[e^{-x}H(x) + e^{x}H(-x)\right] = \frac{1}{2}\begin{cases} e^{-x}, & x \leq 0 \\ e^{x}, & x < 0 \end{cases}$$

$$F(k) = e^{-3(2+ik)}\frac{3(2+ik)-1}{(2+ik)^2}$$