

REGISTRO DELLE LEZIONI DI  
**MATEMATICA APPLICATA**

CORSI DI LAUREA IN BIOMEDICA

6 CFU - A.A. 2015/2016

DOCENTE: DOTT.SSA LUISA FERMO

ULTIMO AGGIORNAMENTO: 18 DICEMBRE 2015

**1. Martedì 29/09/2015, 12–14. ore: 2(2)**

---

Introduzione al corso: problemi ben posti, condizionamento, stabilità, complessità computazionale.

**2. Venerdì 2/10/2015, 08–10. ore: 2(4)**

---

Spazi vettoriali: definizione ed esempi. Combinazioni lineari. Spazio generato da  $n$  vettori. Dipendenza e indipendenza lineare. Basi e dimensione. Esempi. Spazi normati. Norme vettoriali in  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{C}^n$  con indice 1, 2 e  $\infty$ . Equivalenza tra norme. Principali norme utilizzate per le funzioni  $C([a, b])$ ,  $L^1([a, b])$  e  $L^2([a, b])$ . Esercizi. Convergenza di successioni di vettori. Successioni di Cauchy. Spazi di Banach.

**3. Lunedì 12/10/2015, 11–13. ore: 2(6)**

---

Spazi di Hilbert. Norma indotta da un prodotto scalare. Prodotto scalare di  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{C}^n$  e  $L^2([a, b])$ . Ortogonalità e ortonormalità. Base ortonormale. Metodo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt. Esercizi sul metodo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt.

**4. Martedì 13/10/2015, 12–14. ore: 2(8)**

---

Definizione di matrice ed esempi. Somma di matrici e prodotto di una matrice per uno scalare. Prodotto tra matrici. Proprietà del prodotto tra matrici e relazioni con il prodotto scalare. Potenza di una matrice. Definizione di matrice trasposta e di matrice aggiunta e loro proprietà. Definizione di matrice inversa e sue proprietà. Definizione di matrice ortogonale e di matrice unitaria. Esempi.

**5. Mercoledì 14/10/2015, 15–17. ore: 2(10)**

---

Determinante e sue proprietà. Regola di Laplace per il calcolo del determinante. Autovalori e autovettori. Definizione di spettro e raggio spettrale. Proprietà degli autovalori. Calcolo di autovalori. Esercizi.

**6. Giovedì 15/10/2015, 08–10. ore: 2(12)**

---

Introduzione all'analisi di Fourier. Funzioni periodiche. Periodo fondamentale. Estensione di una funzione per periodicità. Esempi. Funzioni continue a tratti. Armoniche elementari. Polinomio trigonometrico.

**7. Lunedì 19/10/2015, 11–13. ore: 2(14)**

---

Ortogonalità delle armoniche elementari. Formule di Werner. Integrazione di una funzione periodica su un periodo.

**8. Martedì 20/10/2015, 12–14. ore: 2(16)**

---

Calcolo dei coefficienti del polinomio trigonometrico. Energia di un segnale e di un polinomio trigonometrico. Disuguaglianza di Bessel. Uguaglianza di Parseval. Serie di Fourier. Forma trigonometrica della serie di Fourier. Forma armonica della serie di Fourier.

**9. Lunedì 26/10/2015, 11–13. ore: 2(18)**

---

Calcolo delle serie di Fourier di alcune funzioni. Funzioni regolari a tratti. Teorema di convergenza della serie di Fourier.

**10. Lunedì 02/11/2015, 09–13. ore: 4(22)**

---

Lemma di Riemann-Lebesgue. Serie di Fourier di funzioni pari e dispari. Esercizi sulle serie di Fourier. Formula di Eulero. Forma complessa della serie di Fourier. Legame tra i coefficienti delle forme reale e complessa. Integrabilità e derivabilità termine a termine di una serie di Fourier. Applicazione delle serie di Fourier alla risoluzione di equazioni differenziali.

**11. Martedì 03/11/2015, 12–14. ore: 2(24)**

---

Introduzione alla trasformata di Fourier: passaggio dalla serie di Fourier alla trasformata, analogie e differenze. Trasformata inversa. Calcolo della trasformate di alcune funzioni elementari: impulso esponenziale troncato, impulso esponenziale pari, impulso esponenziale dispari, onda quadra. Funzione sinc. Delta di Dirac e sua trasformata.

**12. Mercoledì 4/11/2015, 15–17. ore: 2(26)**

---

Proprietà della trasformata di Fourier: linearità, traslazione nello spazio ordinario e nello spazio delle frequenze, variazione di scala. Esercizi.

**13. Giovedì 5/11/2015, 08–10. ore: 2(28)**

---

Calcolo della trasformata di Fourier della funzione Gaussiana. Proprietà della trasformata di Fourier: simmetria, modulazione. Derivazione nello spazio delle frequenze.

**14. Lunedì 09/11/2015, 11–13. ore: 2(30)**

---

Esercizi sulle trasformate di Fourier. Convoluzione. Commutatività. Trasformata della convoluzione.

**15. Mercoledì 11/11/2015, 15–17. ore: 2(32)**

---

Trasformata della derivata di una funzione. Risoluzione di un'equazione differenziale mediante la trasformata di Fourier. Esercizi.

**16. Giovedì 12/11/2015, 8–10. ore: 2(34)**

---

Introduzione alla risoluzione di sistemi lineari e possibili rappresentazioni. Matrici strutturate: matrici diagonali, triangolari (superiore o inferiore), unitarie e ortogonali. Matrici sparse e matrici dense.

**17. Lunedì 23/11/2015, 11–13. ore: 2(36)**

Matrici Hermitiane e matrici simmetriche. Matrici definite positive e semi-definite positive. Norme matriciali. Proprietà di submoltiplicatività e consistenza. La norma di Frobenius. Norme naturali. Espressione della norma naturale indotta dalla norma vettoriale con indice  $\infty$ . Norme matriciali indotte dalle norme vettoriali con indice 1 e 2. Relazioni tra norme matriciali e raggio spettrale.

**18. Martedì 24/11/2015, 12–14. ore: 2(38)**

Condizioni per l'esistenza e l'unicità della soluzione di sistemi lineari. Condizionamento relativo di un sistema lineare in presenza di errori sui soli termini noti. Indice di condizionamento. Proprietà dell'indice condizionamento. Il caso delle matrici ortogonali. Il caso delle matrici simmetriche.

**19. Mercoledì 25/11/2015, 17–19. ore: 2(40)**

Metodo di risoluzione di un sistema lineare ortogonale e sua complessità computazionale. Sistemi lineari diagonali: algoritmo di risoluzione e complessità. Risoluzione di un sistema triangolare inferiore o superiore: algoritmo e complessità. Esercizi sul condizionamento di un sistema.

**20. Giovedì 26/11/2015, 09–11. ore: 2(42)**

Principi di equivalenza per i sistemi lineari. Analisi dei primi due passi del metodo di eliminazione di Gauss (senza pivoting). Analisi del generico passo  $k$ . Algoritmo. Complessità computazionale. Esercizio.

**21. Lunedì 30/11/2015, 11–13. ore: 2(44)**

Fattorizzazione  $A=LU$ . Applicazione della fattorizzazione  $A=LU$  alla risoluzione di sistemi lineari, al calcolo del determinante e al calcolo dell'inversa. Esercizio. Arresto dell'algoritmo di Gauss in presenza di un pivot nullo. Matrici diagonalmente dominanti per riga e per colonna.

**22. Martedì 1/12/2015, 12–14. ore: 2(46)**

Problemi di accumulo errori nell'algoritmo di Gauss. Algoritmo di Gauss con pivoting parziale. Cenni all'algoritmo di Gauss con pivoting totale. Matrici di scambio e di permutazione. Fattorizzazione  $PA = LU$ . Osservazioni sulla stabilità e sul condizionamento. Applicazioni della fattorizzazione  $PA = LU$  alla risoluzione di sistemi lineari, al calcolo del determinante e al calcolo dell'inversa.

**23. Mercoledì 2/12/2015, 15–17. ore: 2(48)**

Esercizio sul metodo di Gauss con pivoting parziale. Metodi iterativi stazionari del primo ordine. Calcolo iterato. Convergenza e consistenza di un metodo iterativo. Condizione sufficiente per la convergenza di un metodo iterativo. Condizione necessaria e sufficiente per la convergenza di un metodo iterativo.

**24. Giovedì 3/12/2015, 9–11. ore: 2(50)**

Criteri di arresto: scarto tra iterazioni successive, numero massimo di iterazioni, condizione sul residuo. Metodo di Jacobi. Espressione matriciale e espressione in componenti. Parallelizzabilità. Metodo iterativo di Gauss-Seidel. Espressione matriciale del metodo ed espressione in componenti. Parallelizzabilità. Teoremi di convergenza per matrici simmetriche definite positive e diagonalmente dominanti.

**25. Mercoledì 9/12/2015, 15–17. ore: 2(52)**

Il problema di Cauchy per una equazione differenziale ordinaria del primo ordine. Il problema di Cauchy associato a un sistema di due equazioni differenziali ordinarie. Equazioni differenziali di ordine superiore al primo: come trasformarle in equazioni del primo ordine. Esistenza e unicità globale e locale della soluzione del problema di Cauchy. Lipschitzianità: definizione e relazione con la continuità e con la derivabilità. Esempi.

**26. Giovedì 10/12/2015, 9–11. ore: 2(54)**

---

Metodi alle differenze finite. Discretizzazione del dominio. Schemi numerici monostep, multistep, espliciti ed impliciti. Metodo di Eulero esplicito per una equazione differenziale ordinaria. Estensione al caso dei sistemi.

**27. Lunedì 14/12/2015, 11–13. ore: 2(56)**

---

Metodo di Eulero implicito. Metodo del punto medio. Metodo di Crank-Nicolson. Metodo di Heun. Metodo di Eulero modificato. Metodi di Runge-Kutta.

**28. Martedì 15/12/2015, 12–14. ore: 2(58)**

---

Analisi dei metodi monostep. Errore globale, locale e di propagazione. Convergenza, consistenza e stabilità di una formula alle differenze finite. Stabilità dei metodi monostep. Errore locale di discretizzazione, consistenza e ordine di consistenza. Verifica della consistenza per alcune formule monostep mediante sviluppo in serie dell'errore locale di discretizzazione. Esercizio.

**29. Mercoledì 16/12/2015, 15–17. ore: 2(60)**

---

Formulazione generale dei metodi multistep. Errore locale di discretizzazione per una formula multistep. Consistenza e ordine. Polinomio caratteristico associato ad un metodo multistep. Stabilità. Condizione delle radici. Teorema di Dahlquist. Prima barriera di Dahlquist. Esercizio.

**Totale ore: 60 (lezione), 0 (esercitazione)**