

REGISTRO DELLE LEZIONI DI
MATEMATICA APPLICATA
CORSI DI LAUREA IN BIOMEDICA
6 CFU - A.A. 2016/2017
DOCENTE: DOTT.SSA LUISA FERMO
ULTIMO AGGIORNAMENTO: 13 DICEMBRE 2016

1. Lunedì 26/09/2016, 11–13. ore: 2(2)

Introduzione al corso: problemi ben posti, condizionamento, stabilità, complessità computazionale.

2. Martedì 27/09/2016, 12–14. ore: 2(4)

Spazi vettoriali: definizione ed esempi. Combinazioni lineari. Spazio generato da n vettori. Dipendenza e indipendenza lineare. Esempi. Spazi normati. Norme vettoriali in \mathbb{R}^n e \mathbb{C}^n con indice 1, 2 e ∞ .

3. Mercoledì 28/09/2016, 15–17. ore: 2(6)

Equivalenza tra norme. Principali norme utilizzate per le funzioni $C([a, b])$, $L^1([a, b])$ e $L^2([a, b])$. Esercizi. Convergenza di successioni di vettori. Successioni di Cauchy. Spazi di Banach. Spazi di Hilbert. Norma indotta da un prodotto scalare. Prodotto scalare di \mathbb{R}^n , \mathbb{C}^n e $L^2([a, b])$. Ortogonalità e ortonormalità. Basi e dimensioni. Base ortonormale. Metodo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt.

4. Lunedì 3/10/2016, 11–13. ore: 2(8)

Esercizio sul metodo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt. Definizione di matrice ed esempi. Matrice trasposta e matrice aggiunta. Somma di matrici e prodotto di una matrice per uno scalare. Prodotto tra matrici. Proprietà del prodotto tra matrici e relazioni con il prodotto scalare.

5. Martedì 4/10/2016, 12–14. ore: 2(10)

Proprietà della matrice trasposta e matrice aggiunta. Potenza di una matrice. Definizione di matrice inversa e sue proprietà. Definizione di matrice ortogonale e di matrice unitaria. Determinante e sue proprietà. Regola di Laplace per il calcolo del determinante. Autovalori e autovettori. Definizione di spettro e raggio spettrale. Proprietà degli autovalori.

6. Mercoledì 5/10/2016, 15–17. ore: 2(12)

Esercizi sul calcolo di autovalori. Introduzione all'analisi di Fourier. Funzioni periodiche. Periodo fondamentale. Estensione di una funzione per periodicità. Esempi. Funzioni continue a tratti.

7. Lunedì 10/10/2016, 11–13. ore: 2(14)

Armoniche elementari. Polinomio trigonometrico. Ortogonalità delle armoniche elementari. Formule di Werner. Ortonormalità del sistema trigonometrico. Integrazione di una funzione periodica su un periodo.

8. Martedì 11/10/2016, 12–14. ore: 2(16)

Calcolo dei coefficienti del polinomio trigonometrico. Energia di un segnale e di un polinomio trigonometrico. Disuguaglianza di Bessel. Uguaglianza di Parseval. Serie di Fourier. Forma trigonometrica della serie di Fourier. Forma armonica della serie di Fourier.

9. Mercoledì 12/10/2016, 15–17. ore: 2(18)

Calcolo delle serie di Fourier di alcune funzioni. Funzioni regolari a tratti. Teorema di convergenza della serie di Fourier. Lemma di Riemann-Lebesgue.

10. Lunedì 17/10/2016, 11–13. ore: 2(20)

Serie di Fourier di funzioni pari e dispari. Esercizi sulle serie di Fourier. Formula di Eulero. Forma complessa della serie di Fourier. Legame tra i coefficienti delle forme reale e complessa.

11. Martedì 18/10/2016, 12–14. ore: 2(22)

Integrabilità e derivabilità termine a termine di una serie di Fourier. Applicazione delle serie di Fourier alla risoluzione di equazioni differenziali.

12. Mercoledì 18/10/2016, 15–17. ore: 2(24)

Introduzione alla trasformata di Fourier: passaggio dalla serie di Fourier alla trasformata, analogie e differenze. Trasformata inversa. Esercizi sulla risoluzione di equazioni differenziali mediante la serie di Fourier.

13. Lunedì 24/10/2016, 11–13. ore: 2(26)

Calcolo della trasformate di alcune funzioni elementari: impulso esponenziale troncato, impulso esponenziale pari, impulso esponenziale dispari, onda quadra. Funzione sinc. Delta di Dirac e sua trasformata. Proprietà della trasformata di Fourier: linearità, traslazione nello spazio ordinario.

14. Martedì 25/10/2016, 12–14. ore: 2(28)

Calcolo della trasformata di Fourier della funzione Gaussiana. Traslazione nello spazio delle frequenze, variazione di scala, modulazione. Esercizi.

15. Mercoledì 26/10/2016, 15–17. ore: 2(30)

Proprietà della trasformata di Fourier: simmetria, derivazione nello spazio delle frequenze. Convoluzione. Commutatività. Esercizi.

16. Mercoledì 02/11/2016, 11–13. ore: 2(32)

Trasformata della convoluzione. Esercizi. Trasformata della derivata di una funzione. Risoluzione di un'equazione differenziale mediante la trasformata di Fourier. Esercizi.

17. Lunedì 07/11/2016, 11–13. ore: 2(34)

Introduzione alla risoluzione di sistemi lineari e possibili rappresentazioni. Matrici sparse e matrici dense. Matrici strutturate: matrici diagonali, triangolari (superiore o inferiore), unitarie e ortogonali.

18. Martedì 08/11/2016, 12–14. ore: 2(36)

Matrici Hermitiane e matrici simmetriche. Matrici definite positive e semi-definite positive. Norme matriciali. Proprietà di submoltiplicatività e consistenza. La norma di Frobenius. Norme naturali. Espressione della norma naturale indotta dalla norma vettoriale con indice ∞ .

19. Mercoledì 09/11/2016, 15–17. ore: 2(38)

Norme matriciali indotte dalle norme vettoriali con indice 1 e 2. Relazioni tra norme matriciali e raggio spettrale. Osservazioni sulle norme di matrici simmetriche e matrici ortogonali. Condizionamento relativo di un sistema lineare in presenza di errori sui soli termini noti.

20. Lunedì 21/11/2016, 11–13. ore: 2(40)

Condizioni per l'esistenza e l'unicità della soluzione di sistemi lineari. Indice di condizionamento. Proprietà dell'indice di condizionamento. Il caso delle matrici ortogonali. Il caso delle matrici simmetriche. Esercizio. Metodo di risoluzione di un sistema lineare ortogonale e sua complessità computazionale.

21. Martedì 22/11/2016, 12–14. ore: 2(42)

Sistemi lineari diagonali: algoritmo di risoluzione e complessità. Risoluzione di un sistema triangolare inferiore o superiore: algoritmo e complessità. Principi di equivalenza per i sistemi lineari. Analisi dei primi due passi del metodo di eliminazione di Gauss (senza pivoting).

22. Mercoledì 23/11/2016, 09–11. ore: 2(44)

Analisi del generico passo k dell'algoritmo di Gauss. Complessità computazionale. Esercizio. Fattorizzazione $A=LU$. Applicazione della fattorizzazione $A=LU$ alla risoluzione di sistemi lineari, al calcolo del determinante e al calcolo dell'inversa. Esercizio.

23. Lunedì 28/11/2016, 11–13. ore: 2(46)

Arresto dell'algoritmo di Gauss in presenza di un pivot nullo. Matrici diagonalmente dominanti per riga e per colonna. Problemi di accumulo errori nell'algoritmo di Gauss. Algoritmo di Gauss con pivoting parziale. Fattorizzazione $PA = LU$. Matrici di scambio e di permutazione. Osservazioni sulla stabilità e sul condizionamento. Applicazioni della fattorizzazione $PA = LU$ alla risoluzione di sistemi lineari, al calcolo del determinante e al calcolo dell'inversa.

24. Martedì 29/11/2016, 10–12. ore: 2(48)

Metodi iterativi stazionari del primo ordine. Calcolo iterate. Convergenza e consistenza di un metodo iterativo. Condizione sufficiente per la convergenza di un metodo iterativo. Condizione necessaria e sufficiente per la convergenza di un metodo iterativo. Criteri di arresto: scarto tra iterazioni successive, numero massimo di iterazioni, condizione sul residuo.

25. Mercoledì 30/11/2016, 15–17. ore: 2(50)

Metodo di Jacobi. Espressione matriciale e espressione in componenti. Parallelizzabilità. Metodo iterativo di Gauss-Seidel. Espressione matriciale del metodo ed espressione in componenti. Parallelizzabilità. Teoremi di convergenza per matrici simmetriche definite positive e diagonalmente dominanti.

26. Lunedì 05/12/2016, 11–13. ore: 2(52)

Il problema di Cauchy per una equazione differenziale ordinaria del primo ordine. Il problema di Cauchy associato a un sistema di due equazioni differenziali ordinarie. Equazioni differenziali di ordine superiore al primo: come trasformarle in equazioni del primo ordine. Esistenza e unicità globale e locale della soluzione del problema di Cauchy. Lipschitzianità: definizione e relazione con la continuità e con la derivabilità. Esempi.

27. Martedì 06/12/2016, 12–14. ore: 2(54)

Metodi alle differenze finite. Discretizzazione del dominio. Schemi numerici monostep, multistep, espliciti ed impliciti. Metodo di Eulero esplicito per una equazione differenziale ordinaria. Estensione al caso dei sistemi.

28. Mercoledì 07/12/2016, 15–17. ore: 2(56)

Metodo di Eulero implicito. Metodo del punto medio. Metodo di Crank-Nicolson. Metodo di Heun. Metodo di Eulero modificato. Metodi di Runge-Kutta.

29. Lunedì 12/12/2016, 11–13. ore: 2(58)

Analisi dei metodi monostep. Errore globale, locale e di propagazione. Convergenza, consistenza e stabilità di una formula alle differenze finite. Stabilità dei metodi monostep. Errore locale di discretizzazione, consistenza e ordine di consistenza. Verifica della consistenza per alcune formule monostep mediante sviluppo in serie dell'errore locale di discretizzazione. Esercizio.

30. Martedì 13/12/2016, 12–14. ore: 2(60)

Formulazione generale dei metodi multistep. Errore locale di discretizzazione per una formula multistep. Consistenza e ordine. Polinomio caratteristico associato ad un metodo multistep. Stabilità. Condizione delle radici. Teorema di Dahlquist. Prima barriera di Dahlquist. Analisi del metodo del punto medio. Esercizio.