

REGISTRO DELLE LEZIONI DI  
**MATEMATICA APPLICATA**  
CORSI DI LAUREA IN BIOMEDICA E CHIMICA  
6 CFU - A.A. 2019/2020  
DOCENTE: PROF.SSA LUISA FERMO  
ULTIMO AGGIORNAMENTO: 18 DICEMBRE 2019

**1. Mercoledì 25/09/2019, 11–13. ore: 2(2)**

---

Introduzione al corso. Problemi risolvibili: problemi ben posti, condizionamento, algoritmo.

**2. Lunedì 30/09/2019, 08–10. ore: 2(4)**

---

Stabilità e complessità computazionale di un algoritmo. Spazi vettoriali: definizione ed esempi (gli spazi  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{C}^n$ , lo spazio dei polinomi, lo spazio delle funzioni  $C([a, b])$  e  $L^2([a, b])$ ). Richiami sul modulo di un numero complesso. Combinazioni lineari. Spazio generato da  $n$  vettori. Dipendenza e indipendenza lineare.

**3. Martedì 01/10/2019, 17–19. ore: 2(6)**

---

Spazi normati. Norme vettoriali in  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{C}^n$  con indice 1, 2 e  $\infty$ . Principali norme utilizzate per le funzioni  $C([a, b])$  e  $L^2([a, b])$ . Normalizzazione. Spazi di Hilbert. Norma indotta dal prodotto scalare. Prodotto scalare di  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{C}^n$  e  $L^2([a, b])$ . Ortogonalità e ortonormalità.

**4. Mercoledì 02/10/2019, 11–13. ore: 2(8)**

---

Spazio generato da  $n$  vettori. Basi e dimensione. Esempi. Base ortonormale. Metodo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt. Esercizio sul metodo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt. Definizione di matrice ed esempi. Matrici uguali.

**5. Lunedì 7/10/2019, 08–10. ore: 2(10)**

---

Somma di matrici e prodotto di una matrice per uno scalare. Matrice trasposta e matrice aggiunta. Proprietà sulla trasposta della matrice somma e matrice prodotto. Proprietà sull'aggiunta della matrice somma e matrice prodotto. Prodotto tra matrici. Proprietà del prodotto tra matrici e relazioni con il prodotto scalare. Potenza di una matrice. Matrice identità. Definizione di matrice inversa e sue proprietà. Definizione di matrice ortogonale e di matrice unitaria.

**6. Martedì 8/10/2019, 17–19. ore: 2(12)**

---

Determinante e sue proprietà. Regola di Laplace per il calcolo del determinante. Autovalori e autovettori. Definizione di spettro e raggio spettrale. Proprietà degli autovalori. Esercizi.

**7. Mercoledì 9/10/2019, 11–13. ore: 2(14)**

---

Introduzione all'analisi di Fourier. Funzioni periodiche. Periodo fondamentale. Estensione di una funzione per periodicità. Esempi. Funzioni continue a tratti. Armoniche elementari. Polinomio trigonometrico. Sistema trigonometrico. Ortogonalità del sistema trigonometrico.

**8. Giovedì 10/10/2019, 15–17. ore: 2(16)**

---

Ortogonalità e ortonormalità del sistema trigonometrico. Formule di Werner. Integrazione di una funzione periodica su un periodo. Calcolo dei coefficienti del polinomio trigonometrico. Serie di Fourier. Forma trigonometrica della serie di Fourier. Forma armonica della serie di Fourier. Esercizio.

**9. Lunedì 14/10/2019, 08–10. ore: 2(18)**

---

Funzioni regolari a tratti. Teorema di convergenza della serie di Fourier. Lemma di Riemann-Lebesgue. Serie di Fourier di funzioni pari e dispari. Esercizio sulle serie di Fourier.

**10. Martedì 15/10/2019, 17–19. ore: 2(20)**

---

Integrabilità e derivabilità termine a termine di una serie di Fourier. Applicazione delle serie di Fourier alla risoluzione di equazioni differenziali. Esercizio.

**11. Mercoledì 16/10/2019, 11–13. ore: 2(22)**

---

Introduzione alla trasformata di Fourier. Trasformata inversa. Calcolo della trasformata di Fourier dell'impulso esponenziale troncato a destra e a sinistra, dell'impulso esponenziale pari e dell'impulso esponenziale dispari. Proprietà di linearità e primi esercizi.

**12. Giovedì 17/10/2019, 08–10. ore: 2(24)**

---

Calcolo della trasformata di Fourier dell'onda quadra. Funzione sinc. Delta di Dirac e sua trasformata. Proprietà della trasformata di Fourier: traslazione nello spazio ordinario, traslazione nello spazio delle frequenze, variazione di scala e simmetria. Esercizi.

**13. Lunedì 28/10/2019, 08–10. ore: 2(26)**

---

Proprietà della trasformata di Fourier: modulazione, derivazione nello spazio delle frequenze. Trasformata della derivata di una funzione. Esercizi.

**14. Martedì 29/10/2019, 17–19. ore: 2(28)**

---

Formula di Eulero. Forma complessa della serie di Fourier. Legame tra i coefficienti delle forme reale e complessa. Esercizi riepilogativi sulla serie di Fourier e trasformate.

**15. Lunedì 11/11/2019, 08–10. ore: 2(30)**

---

Dimostrazione teorica del passaggio dalla serie di Fourier in forma complessa alla trasformata e antitrasformata di Fourier. Convoluzione e sua proprietà di commutatività. Esercizi.

---

**16. Martedì 12/11/2019, 17–19. ore: 2(32)**

---

Trasformata della convoluzione. Esercizi. Risoluzione di un'equazione differenziale mediante la trasformata di Fourier. Esercizi.

---

**17. Mercoledì 13/11/2019, 17–19. ore: 2(34)**

---

Introduzione alla risoluzione di sistemi lineari e possibili rappresentazioni. Matrici sparse e matrici dense. Matrici strutturate: matrici diagonali, triangolari (superiore o inferiore), unitarie e ortogonali.

---

**18. Lunedì 18/11/2019, 08–10. ore: 2(36)**

---

Matrici hermitiane e simmetriche. Matrici definite positive e semidefinite positive. Norme matriciali. Proprietà di submoltiplicatività e consistenza. La norma di Frobenius. Norme naturali. Espressione della norma naturale indotta dalla norma vettoriale con indice  $\infty$ .

---

**19. Martedì 19/11/2019, 17–19. ore: 2(38)**

---

Espressione della norma naturale indotta dalla norma vettoriale con indice 1 e indice 2. Osservazioni sulle norme di matrici simmetriche e matrici ortogonali. Condizionamento relativo di un sistema lineare in presenza di errori sui soli termini noti. Indice di condizionamento.

---

**20. Mercoledì 20/11/2019, 11–13. ore: 2(40)**

---

Proprietà dell'indice condizionamento. Il caso delle matrici ortogonali. Il caso delle matrici simmetriche. Esercizi sul condizionamento.

---

**21. Lunedì 25/11/2019, 08–10. ore: 2(42)**

---

Metodo di risoluzione di un sistema lineare ortogonale e sua complessità computazionale. Sistemi lineari diagonali: algoritmo di risoluzione e complessità. Risoluzione di un sistema triangolare inferiore o superiore: algoritmo e complessità. Principi di equivalenza per i sistemi lineari.

**22. Mercoledì 27/11/2019, 11–13. ore: 2(44)**

---

Analisi dei primi due passi del metodo di eliminazione di Gauss (senza pivoting). Complessità computazionale. Fattorizzazione  $A=LU$ . Applicazione della fattorizzazione  $A=LU$  alla risoluzione di sistemi lineari, al calcolo del determinante e al calcolo dell'inversa di una matrice.

**23. Lunedì 2/12/2019, 08–10. ore: 2(46)**

---

Esercizio sulla fattorizzazione  $A = LU$ . Arresto dell'algoritmo di Gauss in presenza di un pivot nullo. Matrici diagonalmente dominanti per riga e per colonna. Problemi di accumulo errori nell'algoritmo di Gauss. Algoritmo di Gauss con pivoting parziale. Stabilità, complessità computazionale e condizionamento della matrice triangolare.

**24. Martedì 3/12/2019, 17–19. ore: 2(48)**

---

Fattorizzazione  $PA = LU$ . Matrici di scambio e di permutazione. Costruzione della matrice  $L$ . Applicazioni della fattorizzazione  $PA = LU$  alla risoluzione di sistemi lineari, al calcolo del determinante e al calcolo dell'inversa. Esercizi. Metodi iterativi stazionari del primo ordine.

**25. Mercoledì 4/12/2019, 11–13. ore: 2(50)**

---

Metodi iterativi stazionari del primo ordine. Calcolo iterato. Convergenza e consistenza di un metodo iterativo. Condizione sufficiente per la convergenza di un metodo iterativo. Condizione necessaria e sufficiente per la convergenza di un metodo iterativo. Criteri di arresto: scarto tra iterazioni successive, numero massimo di iterazioni, condizione sul residuo. Metodo di Jacobi.

**26. Lunedì 09/12/2019, 08–10. ore: 2(52)**

---

Espressione matriciale e espressione in componenti dello schema numerico di Jacobi. Parallelizzabilità. Metodo iterativo di Gauss-Seidel. Espressione matriciale del metodo ed espressione in componenti. Parallelizzabilità. Teoremi di convergenza per matrici simmetriche definite positive e diagonalmente dominanti. Esercizio.

**27. Martedì 10/12/2019, 17–19. ore: 2(54)**

Il problema di Cauchy per una equazione differenziale ordinaria del primo ordine. Il problema di Cauchy associato a un sistema di due equazioni differenziali ordinarie. Equazioni differenziali di ordine superiore al primo: come trasformarle in equazioni del primo ordine. Esistenza e unicità globale e locale della soluzione del problema di Cauchy. Esempi. Metodi alle differenze finite. Discretizzazione del dominio.

**28. Mercoledì 11/12/2019, 11–13. ore: 2(56)**

Metodo di Eulero esplicito per una equazione differenziale ordinaria. Esercizio. Estensione al caso dei sistemi. Metodo di Eulero implicito. Metodo del punto medio. Metodo di Crank-Nicolson. Metodo di Heun. Metodo di Eulero modificato.

**29. Lunedì 16/12/2019, 08–10. ore: 2(58)**

Analisi dei metodi monostep. Errore globale, locale e di propagazione. Convergenza, consistenza e stabilità di una formula alle differenze finite. Stabilità dei metodi monostep. Errore locale di discretizzazione, consistenza e ordine di consistenza. Verifica della consistenza per alcuni formule monostep mediante sviluppo in serie dell'errore locale di discretizzazione. Esercizio.

**30. Martedì 17/12/2019, 17–19. ore: 2(60)**

Formulazione generale dei metodi multistep. Errore locale di discretizzazione per una formula multistep. Consistenza e ordine. Polinomio caratteristico associato ad un metodo multistep. Stabilità. Criterio delle radici. Teorema di Dahlquist. Prima barriera di Dahlquist. Analisi del metodo del punto medio.