Tutorato Matematica Applicata

Docente: Prof. Giuseppe Rodriguez
Tutor: Marco Ratto

Anno Accademico: 2022-2023

Esercitazione 10 (9 Gennaio 2023)

1. (Seconda prova intermedia - 10 gennaio 2019)

   Si considerino le matrici
   $$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ -2\beta & 1/2 & \beta \\ 2\beta & 0 & b\beta \end{bmatrix},$$
   dove α e β sono parametri reali. Si dica, senza fare calcoli e motivando opportunamente la risposta, per quali valori di α la matrice L è invertibile e per quali i suoi autovalori sono positivi. Si determinino i valori di β che rendono B la matrice inversa di A, si calcoli l'indice di condizionamento in norma 1 e ∞ di A e il raggio spettrale della matrice A (si tenga conto che uno degli autovalori di A è 2). Infine nel caso $\alpha = \frac{1}{2}$ si risolva nel modo più conveniente il sistema lineare $L^2\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{b} = (1, 1, 1)^T$.

2. (Seconda prova intermedia - 10 gennaio 2019)

   Si calcoli la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice dei coeffcienti del sistema
   $$\begin{cases} x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 = 2 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$
   e la si usi per risolvere il sistema e calcolare il determinante della matrice.

3. (Seconda prova intermedia - 10 gennaio 2019)

   Si consideri il seguente sistema
   $$\begin{cases} x_1 + \beta x_2 = 2 \\ \beta x_1 + 2x_2 + \beta x_3 = 3 \\ \beta x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$$
   dove β è un parametro reale. Si dica per quali valori di β la matrice dei coeffcienti è non singolare e si studi la convergenza del metodo di Gauss-Seidel al variare di $\beta \in \mathbb{R}$. Posto $\beta = 1$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Jacobi, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 1, 0]^T$.

4. (Recupero seconda prova intermedia - 25 gennaio 2018)

   Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = \frac{3y'}{2x} - 1, & x \in \left[\frac{1}{2}, 5\right], \\ y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}, & y'\left(\frac{1}{2}\right) = 1\,. \end{cases}$$

   e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{2}$ per approssimare la sua soluzione in $x = \frac{3}{2}$.

5. (Recupero seconda prova intermedia - 25 gennaio 2018)

   Si classifichino i seguenti metodi alle differenze finite:

$$(a) \quad \eta_{k+1} = \eta_k + \frac{1}{3}\alpha h\left[f(x_k, \eta_k) + 5f(x_k + \beta h, \eta_k + \beta h f(x_k, \eta_k))\right]$$

$$(b) \quad \eta_{k+1} = (3\gamma + 2)\eta_k - (2\gamma^2 + 3\gamma + 1)\eta_{k-1} + \delta h f(x_{k-1}, \eta_{k-1})$$

   Si determinino i valori dei parametri $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ che rendono stabili entrambi gli schemi. Si dica inoltre quali valori dei parametri coinvolti garantiscono un ordine di convergenza pari a 2 nel metodo monostep.