Tutorato Matematica Applicata

Docente: Prof. Giuseppe Rodriguez
Tutor: Marco Ratto

Anno Accademico: 2022-2023

Esercitazione 2A (25 Ottobre 2022)

1. (Prima prova intermedia - 14 novembre 2017 - Compito 1 - Esercizio 2)
   Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \beta \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha & -\alpha \\ 0 & 1 & \alpha \\ \alpha & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

   dove β e α sono parametri reali. Si determinino i valori del parametro β che rendono la matrice B l'inversa della matrice A e i valori del parametro α che rendono C una matrice non singolare. Si consideri poi la matrice $D = A + C$ e si stabilisca per quali valori del parametro α la matrice D è ortogonale. Fissato tale valore, si calcolino spettro e raggio spettrale di D. Motivando opportunamente la risposta, si indichi spettro e raggio spettrale di D^{-1}.

   Soluzione:

   - $A \equiv B$ se $\beta = \frac{1}{2}$,
   - A non singolare se $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$,
   - D è ortogonale se $\alpha = -1$
   - $\sigma(D) = \sigma(D^{-1}) = \{-1, 1, 1\}, \quad \rho(D) = \rho(D^{-1}) = 1.$

2. Sviluppare in serie di Fourier la seguente funzione

$$f(x) = x + 1, \qquad -\pi \le x < \pi.$$

   Soluzione:

   - $a_0 = 1, \quad a_k = 0, \quad b_k = \frac{2}{k}(-1)^{k+1},$
   - $S_f(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k}(-1)^{k+1} \sin(kx)$

3. (Prova d'esame 27 febbraio 2015) Sviluppare in serie di Fourier la seguente funzione
$$f(x) = \begin{cases} x & -1 \le x < 0 \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) & 0 \le x < 1\,. \end{cases}$$

Soluzione:

- $a_0 = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{4}$,
- $a_k = \frac{1}{k^2\pi^2}\left[1 + (-1)^{k+1}\right] + \frac{1}{\pi+2k\pi} + \frac{1}{\pi-2k\pi}$,
- $b_k = (-1)^{k+1}\left[\frac{1}{k\pi} + \frac{1}{2k\pi+\pi} + \frac{1}{2k\pi-\pi}\right]$,

$$\bullet\, S_f(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{1}{k^2\pi^2}\left[1 + (-1)^{k+1}\right] + \frac{1}{\pi+2k\pi} + \frac{1}{\pi-2k\pi}\right]\cos(k\pi x) + \right.$$
$$\left. + \left[(-1)^{k+1}\left(\frac{1}{k\pi} + \frac{1}{2k\pi+\pi} + \frac{1}{2k\pi-\pi}\right)\right]\sin(k\pi x)\right\}$$