Tutorato delle lezioni di
MATEMATICA APPLICATA
A.A. 2019/2020

docente: Dott.ssa Luisa Fermo
tutor: Dott.ssa Patricia Díaz de Alba

Esercitazione del 21/11/2019
Algebra lineare

Esercizio 1 Si considerino le matrici

$$L = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \alpha & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \beta \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

Si determinino i valori di α e β che rendono M e U una l'inversa dell'altra e che rendono simmetrica la matrice $A = LM$. Assegnato a ciascun parametro uno dei valori trovati, si calcoli nel modo più conveniente l'inversa di A, il suo raggio spettrale e il suo indice di condizionamento in norma 1, 2 e ∞.

Soluzione:
M è l'inversa di U per $\beta = -\frac{1}{8}$. $A = LM$ è simmetrica per $\alpha = 1$.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{64} & 0 & -\frac{1}{16} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{16} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$\rho(A) = \frac{21+\sqrt{185}}{2}$.

$K_1(A) = \frac{25}{4} = K_\infty(A)$, $K_2(A) = \frac{21+\sqrt{185}}{21-\sqrt{185}}$.

Esercizio 2 A partire dalle seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1/\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 3\beta & -\beta \\ 0 & -\beta & 2\beta \end{bmatrix},$$

dove α e β sono due parametri reali. Si stabilisca per quali valori del parametro α la matrice A è invertibile e per quali la matrice A è definita positiva. Si calcoli per quali valori di β B è la matrice inversa di A. Fissato, quindi, un tale valore si determini al variare di α il condizionamento di A con indice 1, 2, ∞.

Soluzione:
A è invertibile per $\alpha \neq 0$ e definita positiva per $\alpha > 0$.
B è l'inversa di A per $\beta = \frac{1}{5}$.

$$K_1(A) = \begin{cases} \dfrac{4}{|\alpha|}, & -\dfrac{5}{4} \leq \alpha \leq \dfrac{5}{4} \\ \\ \dfrac{16}{5}, & -4 \leq \alpha < -\dfrac{5}{4} \quad o \quad \dfrac{5}{4} < \alpha \leq 4 \\ \\ \dfrac{4|\alpha|}{5}, & \alpha < -4 \quad o \quad \alpha > 4 \end{cases}$$

$K_\infty(A) = K_1(A)$.

$$K_2(A) = \begin{cases} \dfrac{5+\sqrt{5}}{2|\alpha|}, & \dfrac{-5+\sqrt{5}}{2} \leq \alpha \leq \dfrac{5-\sqrt{5}}{2} \\ \\ \dfrac{5+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}, & \dfrac{-5-\sqrt{5}}{2} \leq \alpha < \dfrac{-5+\sqrt{5}}{2} \quad o \quad \dfrac{5-\sqrt{5}}{2} < \alpha \leq \dfrac{5+\sqrt{5}}{2} \\ \\ \dfrac{2|\alpha|}{5-\sqrt{5}}, & \alpha < \dfrac{-5-\sqrt{5}}{2} \quad o \quad \alpha > \dfrac{5+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Esercizio 3 Si considerino le seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha/3 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha/3 & \alpha \end{bmatrix},$$

dove α è un parametro reale. Si dica per quali valori di α la matrice B è l'inversa di A. Fissando il parametro di α trovato si calcoli, infine, l'indice di condizionamento di A con indice 1, 2 e ∞.

Soluzione:
B è l'inversa di A per $\alpha = \frac{1}{3}$.
$K_1(A) = \frac{25}{9}$.

$K_\infty(A) = \frac{16}{9}$.

$K_1(A) = \sqrt{\frac{20+\sqrt{76}}{20-\sqrt{76}}}$.

Esercizio 4 [Esercizio 2 del primo parziale] Si considerino le seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & 3\alpha & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2/\beta & -1 & \beta \\ -1 & 1 & -1 \\ \beta & -1 & 2\beta \end{bmatrix},$$

dove α e α sono parametri reali. Determinare i valori di α che rendono invertibile la matrice A e, fissato $\alpha = 1$, i valori di β che rendono B l'inversa di A. Per gli stessi valori dei parametri, determinare lo spettro di A e il raggio spettrale di A, B e A^3. Si calcoli infine la norma ∞ del vettore $y = Ax$, dove $x = (2, i, 1+i)^T$.