Tutorato MATEMATICA APPLICATA

A.A. 2019/2020
Docente: Prof.ssa Luisa Fermo
Tutor: Dott.ssa Federica Pes

Esercitazione del 24/10/2019
Algebra lineare, serie di Fourier, trasformate di Fourier

1) (Prima prova intermedia 14 novembre 2017) Si considerino le seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \beta \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha & -\alpha \\ 0 & 1 & \alpha \\ \alpha & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

dove α e β sono parametri reali. Si determinino i valori del parametro β che rendono la matrice B l'inversa della matrice A e i valori del parametro α che rendono C una matrice non singolare. Si consideri poi la matrice $D = A + C$ e si stabilisca per quali valori del parametro α la matrice D è ortogonale. Fissato tale valore, si calcolino spettro e raggio spettrale di D. Motivando opportunamente la risposta, si indichi spettro e raggio spettrale di D^{-1}.

SOLUZIONE:
$B \equiv A^{-1}$ se $\beta = 1/2$.
C è non singolare per ogni valore di $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.
D è ortogonale se $\alpha = -1$, $\sigma(D) = \sigma(D^{-1}) = \{-1, 1, 1\}$, $\rho(D) = \rho(D^{-1}) = 1$.

2) (Recupero prima prova intermedia 29 gennaio 2016) Sviluppare in serie di Fourier la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{\pi}\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) & x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \\ \cos(x) & x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \dfrac{2}{\pi}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) & x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$$

SOLUZIONE:
$a_0 = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{4}$, $\quad a_k = \cos(k\frac{\pi}{2}) \left[\frac{1}{\pi(1+k)} + \frac{1}{\pi(1-k)} - \frac{4}{k^2\pi^2}\right] + \frac{4(-1)^k}{k^2\pi^2}$, $\quad a_1 = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}$,
$b_k = 0$ ($f(x)$ è pari),

$$S_f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\right)\cos(x) + \sum_{k=2}^{\infty} \left\{ \cos(k\frac{\pi}{2}) \left[\frac{1}{\pi(1+k)} + \frac{1}{\pi(1-k)} - \frac{4}{k^2\pi^2}\right] + \frac{4(-1)^k}{k^2\pi^2} \right\} \cos(kx)$$

3) Eseguire i seguenti calcoli

- $\mathcal{F}\{e^{-2x^2}\}$
- $\mathcal{F}\left\{\dfrac{1}{9 + x^2}\right\}$
- $\mathcal{F}\left\{\dfrac{1}{x^2 + 4x + 5}\right\}$

- $\mathcal{F}^{-1}\left\{\dfrac{\sin(\pi(k-5))}{k-5}\right\}$

<u>SOLUZIONE</u>:

$$\mathcal{F}\{e^{-2x^2}\} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{k^2}{8}}$$

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{9+x^2}\right\} = \frac{\pi}{3}e^{-3|k|}$$

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{x^2+4x+5}\right\} = \pi e^{2ik-|k|}$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\sin(\pi(k-5))}{k-5}\right\} = \frac{1}{2}e^{5ix}[H(x+\pi)-H(x-\pi)]$$