Tutorato delle lezioni di
MATEMATICA APPLICATA
A.A. 2019/2020
docente: Dott.ssa Luisa Fermo
tutor: Dott.ssa Patricia Díaz de Alba

Esercitazione del 28/11/2019
Algebra lineare e Trasformate di Fourier

Esercizio 1 Si considerino le matrici

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ -2\beta & 1/2 & \beta \\ 2\beta & 0 & 4\beta \end{bmatrix},$$

dove α e β sono parametri reali.

1. Si dica, senza fare calcoli e motivando opportunamente la risposta, per quali valori di α la matrice L è invertibile e per quali i suoi autovalori sono positivi. Infine, nel caso $\alpha = 1/2$ si risolva nel modo più conveniente il sistema lineare $L^2\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove $\mathbf{b}$ è il vettore unitario.

2. Si determini il valori di β che rende B la matrice inversa di A. Fissando il valore trovato, si calcoli l'indice di condizionamento in norma 1 e ∞ di A e il raggio spettrale della matrice A (si tenga conto che uno degli autovalori di A è 2).

3. Si considerino la seguente matrice e il seguente vettore

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & \beta/2 \\ 0 & -\beta/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]^T.$$

   Si calcolino i valori di β che rendono C una matrice ortogonale e, fissato uno di questi, si risolva nel modo più conveniente il sistema lineare $C\mathbf{x} = \mathbf{w}$. Senza fare calcoli e motivando la risposta, si dica quanto vale il modulo degli autovalori di C. Si calcoli, infine, il condizionamento in norma 1, 2, e ∞ di C.

Soluzione:
1) L è invertibile per $\alpha \neq 0$*. Gli autovalori di L sono tutti positivi per*$\alpha > 0$*.*
La soluzion x *del sistema è* $x = [1, 1, -1]^T$*.*
2)La matrice B è l'inversa di A per $\beta = \dfrac{1}{10}$*.*
$K_1(A) = 5$*,* $K_\infty(A) = 7$*.*
$\rho(A) = \sqrt{5}$*.*
3) La matrice C è ortogonale per $\beta = \pm\sqrt{3}$*.*
La soluzion x *del sistema per* $\beta = \sqrt{3}$ *è* $x = [1/\sqrt{2}, (1+\sqrt{3})/2\sqrt{2}, (\sqrt{3}-1)/2\sqrt{2}]^T$*.*
Il modulo degli autovalori di C vale 1.
$K_1(C) = \dfrac{(1+\sqrt{3})^2}{4} = K_\infty(C)$*,* $K_2(C) = 1$*.*

Esercizio 2 Risolvere, mediante l'uso della trasformata di Fourier, l'equazione differenziale

$$y' + 2\sqrt{3}y = H(x+3) - H(x-5)$$

Soluzione:

$$y = \begin{cases} 0, & x < -3 \\ \dfrac{e^{-2\sqrt{3}x}}{2\sqrt{3}}[e^{2\sqrt{3}x} - e^{-6\sqrt{3}}], & x \in [-3, 5] \\ \dfrac{e^{-2\sqrt{3}x}}{2\sqrt{3}}[e^{10\sqrt{3}} - e^{-6\sqrt{3}}], & x > 5 \end{cases}$$

Esercizio 3 Risolvere, mediante l'uso della trasformata di Fourier, l'equazione differenziale

$$y' + 2y = e^{6x}H(-x)$$

Soluzione:

$$y = \frac{1}{8}e^{-2x}H(x) + \frac{1}{8}e^{6x}H(-x)$$