TUTORATO DELLE LEZIONI DI

MATEMATICA APPLICATA

A.A. 2019/2020

DOCENTE: PROF.SSA LUISA FERMO

TUTOR: DOTT.SSA PATRICIA DÍAZ DE ALBA

Esercitazione del 05/12/2019

Fattorizzazione PA=LU e metodi iterativi

Esercizio 1 Risolvere, mediante la fattorizzazione $PA = LU$, il sistema lineare

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 - x_4 = 1 \\ -4x_1 = 4 \\ 8x_1 + 8x_2 - 8x_3 + 8x_4 = -8 \\ 2x_1 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$$

e la si usi per risolvere il sistema e calcolare il determinante della matrice.

Soluzione:

$$U = \begin{bmatrix} 8 & 8 & -8 & 8 \\ 0 & 4 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & -1/2 & 1 & 0 \\ -1/4 & 1/4 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x = [-1, 0, 1, 1]^T$, $\det(A) = 64$.

Esercizio 2 Risolvere, mediante la fattorizzazione $PA = LU$, il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -2 \\ 3x_1 + x_2 = -1 \\ x_1 = -1 \end{cases}$$

e utilizzarla per calcolare il determinante della matrice dei coefficienti, e la terza colonna dell'inversa della matrice dei coefficienti.

Soluzione:

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & -1/3 & 1 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det(A) = 1,\ x = [-1, 2, -3, 4]^T,\ x_3 = [0, 1, -2, 1]^T$

Esercizio 3 Assegnati

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 0 \\ 4 & 8 & 4 \\ 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

studiare la convergenza del metodo di Jacobi applicato al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e calcolare le prime due iterate, a partire dal vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 0, 1]^T$.

Soluzione:

$\rho(H_J) = 1/2$ *quindi il metodo di Jacobi converge.*

$x^{(1)} = [1/8, -3/8, 1/8]^T,\ x^{(2)} = [7/32, 0, 7/32]^T$

Esercizio 4 Si consideri il seguente sistema sistema lineare

$$\begin{cases} \alpha x_1 + \frac{\alpha}{3} x_3 = 4 \\ \alpha x_2 + \frac{1}{3} x_3 = 3 \\ \frac{\alpha}{3} x_1 + \frac{1}{3} x_2 + \alpha x_3 = 1 \end{cases}$$

dove α è un parametro reale. Si dica per quali valori di α la matrice dei coefficienti è non singolare e si stabilisca per quali valori di $\alpha = 1$, $\alpha = 2$ e $\alpha = 1/6$ il metodo di Jacobi converge. Per $\alpha = 1$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Jacobi, a partire da $x^{(0)} = [0, 1, 0]^T$.

Soluzione:

La matrice A *dei coefficienti è non singolare per* $\alpha \neq 0, \pm\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Il metodo di Jacobi converge per $\alpha = 1$ *e* $\alpha = 2$.

$x^{(1)} = [4, 3, 2/3]^T$, $x^{(2)} = [34/9, 25/9, -4/3]^T$.