Esercitazione 22/01/2018

Correzione prova scritta di Calcolo Scientifico e Metodi Numerici 16/01/18

COMPITO 1

1. Si consideri il seguente sistema

$$\begin{cases} 4x_1 + 3\beta x_3 = -4 \\ 3x_2 = 3 \\ \beta x_1 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

dove β è un parametro reale. Stabilire per quali valori del parametro il sistema ammette una sola soluzione e per quali il metodo di Jacobi converge. Posto $\beta = 1$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Gauß-Seidel, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 1, 1]^T$. Senza fare calcoli e motivando opportunamente la risposta si dica se nel caso $\beta = 1$ il metodo di Gauß-Seidel converge.

Soluzione. Il sistema ammette una sola soluzione quando $\det(A) \neq 0$ (con A matrice dei coefficienti) e quindi per $\beta \neq \pm 2\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Il metodo di Jacobi converge per i valori di β per cui $\rho(B_J) < 1$, dove $B_J = D^{-1}(E + F)$ è la matrice di iterazione data da

$$B_J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3\beta/4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\beta/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

che ha raggio spettrale minore di 1 per $-\sqrt{\frac{8}{3}} < \beta < \sqrt{\frac{8}{3}}$.

Ponendo $\beta = 1$ le prime due iterazioni del metodo di Gauss-Seidel sono:

$$\mathbf{x}^{(1)} = [-7/4, 1, 11/8]^T, \quad \mathbf{x}^{(2)} = [-65/32, 1, 97/64]^T$$

2. Si considerino le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \alpha \\ 0 & -2 & 0 \\ -\alpha & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & \beta & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Si determinino i valori dei paramentri α e β che rendono A e B l'una l'inversa dell'altra e verificare che C sia una matrice ortogonale. Assegnati ai parametri i valori trovati, si calcoli l'indice di condizionamento delle tre matrici in norma 1, 2 e ∞. Infine, si risolva nel modo più conveniente il sistema lineare $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $M = BC$ e $\mathbf{b} = [1, 1, 1]^T$.

Soluzione. A e B sono una l'inversa dell'altra per $\alpha = 1$ e $\beta = -5/2$. La matrice C è ortogonale essendo $CC^T = I$. I numeri di condizionamento sono:

$$k_1(A) = k_\infty(A) = 9/5, \quad k_2(A) = \sqrt{\frac{9}{5}}$$

$$k_1(B) = k_1(A) = k_\infty(A) = k_\infty(B) = 9/5, \quad k_2(B) = k_2(A) = \sqrt{\frac{9}{5}}$$

$$k_1(C) = k_\infty(C) = 2, \quad k_2(C) = 1 \quad \text{(essendo } C \text{ ortogonale)}$$

Per risolvere il sistema $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $M = BC$ e $\mathbf{b} = [1,1,1]^T$ basta osservare che

$$\mathbf{x} = M^{-1}\mathbf{b} = (C^{-1}B^{-1})\mathbf{b} = C^T A\mathbf{b},$$

quindi eseguendo i calcoli si trova $\mathbf{x} = [-\sqrt{2}, -2, 2\sqrt{2}]^T$.

3. Determinare l'intervallo $[k, k+1]$ che contenga la radice positiva dell'equazione

$$\cos(4x) - 2x - \frac{1}{4} = 0.$$

Calcolare le prime tre iterazioni del metodo di bisezione, a partire dall'intervallo trovato, e le prime due iterazioni del metodo di Newton, a partire dall'estremo sinistro dell'intervallo determinato. Dire qual è l'ordine di convergenza del metodo di bisezione.

Soluzione. Tramite il metodo grafico si trova che la radice α dell'equazione non lineare data appartiene all'intervallo $[0,1]$. Le prime tre iterazioni del metodo di bisezione sono:

$$c_0 = \frac{1}{2}, \quad f(0)f(c_0) < 0 \quad \text{quindi} \quad \alpha \in [0, 1/2]$$

$$c_1 = \frac{1}{4}, \quad f(0)f(c_1) < 0 \quad \text{quindi} \quad \alpha \in [0, 1/4]$$

$$c_2 = \frac{1}{8}, \quad f(0)f(c_2) > 0 \quad \text{quindi} \quad \alpha \in [1/8, 1/4].$$

Le prime due iterazioni del metodo di Newton a partire dall'estremo sinistro dell'intervallo determinato sono

$$x_1 = 3/8 = 0.375 \quad x_2 \simeq 0.2199.$$

4. Si calcoli la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice dei coefficienti del sistema

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + \frac{1}{3}x_3 + x_4 = -3 \\ 2x_2 + \frac{1}{4}x_3 + 5x_4 = -7 \\ 2x_1 + \frac{3}{2}x_3 + 2x_4 = -2 \end{cases}$$

e utilizzarla per risolvere il sistema e per calcolare la terza colonna dell'inversa della matrice dei coefficienti.

Soluzione.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5/6 & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 7/3 \end{bmatrix}$$

La soluzione del sistema lineare è $\mathbf{x} = [0, -1, 0, -1]^T$ e la terza colonna dell'inversa della matrice dei coefficienti A è $[6/7, -5/14, -12/7, 3/7]^T$.

5. Costruire, utilizzando la rappresentazione di Lagrange, il polinomio che interpola la seguente tabella di dati

x_i	-2	-1	1	2
y_i	2	1	3	1

Calcolare inoltre il valore assunto dal polinomio nel punto di ascissa $x = 3$. *Soluzione.*

Il polinomio interpolante di lagrange è

$$p_3(x) = 2L_0(x) + L_1(x) + 3L_2(x) + L_3(x) = -\frac{5}{12}x^3 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{17}{12}x + \frac{13}{6}$$

e il suo valore in $x = 3$ è $p_3(3) = -\frac{19}{3}$.

COMPITO 2

1. Si consideri il seguente sistema

$$\begin{cases} 8x_1 + 6\alpha x_3 = -8 \\ 6x_2 = 6 \\ 2\alpha x_1 + 4x_3 = -2 \end{cases}$$

dove α è un parametro reale. Stabilire per quali valori del parametro il sistema ammette una sola soluzione e per quali il metodo di Gauß-Seidel converge. Posto $\alpha = 2$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Jacobi, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 1, 1]^T$. Senza fare calcoli e motivando opportunamente la risposta si dica se nel caso $\alpha = 2$ il metodo di Jacobi converge.

Soluzione. Il sistema ammette una sola soluzione quando $\det(A) \neq 0$ (con A matrice dei coefficienti) e quindi per $\beta \neq \pm 2\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Il metodo di Jacobi converge per i valori di β per cui $\rho(B_J) < 1$, dove $B_J = D^{-1}(E + F)$ è la matrice di iterazione data da

$$B_J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3\beta/4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\beta/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

che ha raggio spettrale minore di 1 per $-\sqrt{\frac{8}{3}} < \beta < \sqrt{\frac{8}{3}}$.

Ponendo $\beta = 1$ le prime due iterazioni del metodo di Gauss-Seidel sono:

$$\mathbf{x^{(1)}} = [-7/4, 1, 11/8]^T, \quad \mathbf{x^{(2)}} = [-65/32, 1, 97/64]^T$$

2. Si considerino le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \alpha \\ 0 & 2 & 0 \\ \alpha & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & \beta & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Si determinino i valori dei paramentri α e β che rendono A e B l'una l'inversa dell'altra e verificare che C sia una matrice ortogonale. Assegnati ai parametri i valori trovati, si calcoli l'indice di condizionamento delle tre matrici in norma 1, 2 e ∞. Infine, si risolva nel modo più conveniente il sistema lineare $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $M = BC$ e $\mathbf{b} = [1, 1, 1]^T$.

Soluzione. A e B sono una l'inversa dell'altra per $\alpha = 1$ e $\beta = 3/2$. La matrice C è ortogonale essendo $CC^T = I$. I numeri di condizionamento sono:

$$k_1(A) = k_\infty(A) = 3, \quad k_2(A) = 3$$

$$k_1(B) = k_1(A) = k_\infty(A) = k_\infty(B) = 3, \quad k_2(B) = k_2(A) = 3$$
$$k_1(C) = k_\infty(C) = 2, \quad k_2(C) = 1 \quad \text{(essendo } C \text{ ortogonale)}$$

Per risolvere il sistema $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $M = BC$ e $\mathbf{b} = [1, 1, 1]^T$ basta osservare che

$$\mathbf{x} = M^{-1}\mathbf{b} = (C^{-1}B^{-1})\mathbf{b} = C^T A\mathbf{b},$$

quindi eseguendo i calcoli si trova $\mathbf{x} = [0, 2, 3\sqrt{2}]^T$.

3. Determinare l'intervallo $[k, k+1]$ che contenga la radice positiva dell'equazione

$$\sin(4x) + 2x - 1 = 0.$$

Calcolare le prime tre iterazioni del metodo di bisezione, a partire dall'intervallo trovato, e le prime due iterazioni del metodo di Newton, a partire dall'estremo sinistro dell'intervallo determinato. Dire qual è l'ordine di convergenza del metodo di bisezione.

Soluzione. Tramite il metodo grafico si trova che la radice α dell'equazione non lineare data appartiene all'intervallo $[0, 1]$. Le prime tre iterazioni del metodo di bisezione sono:

$$c_0 = \frac{1}{2}, \quad f(0)f(c_0) < 0 \quad \text{quindi} \quad \alpha \in [0, 1/2]$$
$$c_1 = \frac{1}{4}, \quad f(0)f(c_1) < 0 \quad \text{quindi} \quad \alpha \in [0, 1/4]$$
$$c_2 = \frac{1}{8}, \quad f(0)f(c_2) > 0 \quad \text{quindi} \quad \alpha \in [1/8, 1/4].$$

Le prime due iterazioni del metodo di Newton a partire dall'estremo sinistro dell'intervallo determinato sono

$$x_1 = 1/6 = 0.1667 \quad x_2 \simeq 0.1761.$$

4. Si calcoli la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice dei coefficienti del sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \frac{1}{3}x_3 + x_4 = -3 \\ 4x_1 + 2x_3 = 0 \\ 2x_2 + \frac{1}{4}x_3 + 5x_4 = -7 \\ 2x_1 + \frac{3}{2}x_3 + 2x_4 = -2 \end{cases}$$

e utilizzarla per risolvere il sistema e per calcolare la seconda colonna dell'inversa della matrice dei coefficienti.

Soluzione.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5/6 & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 7/3 \end{bmatrix}$$

La soluzione del sistema lineare è $\mathbf{x} = [0, -1, 0, -1]^T$ e la terza colonna dell'inversa della matrice dei coefficienti A è $[37/28, 75/168, -15/7, 2/7]^T$.

5. Costruire, utilizzando la rappresentazione di Lagrange, il polinomio che interpola la seguente tabella di dati

x_i	-2	-1	1	2
y_i	1	3	1	2

Calcolare inoltre il valore assunto dal polinomio nel punto di ascissa $x = 3$. *Soluzione.* Il polinomio interpolante di lagrange è

$$p_3(x) = L_0(x) + 3L_1(x) + L_2(x) + 2L_3(x) = \frac{5}{12}x^3 - \frac{1}{6}x^2 - \frac{17}{12}x + \frac{13}{6}$$

e il suo valore in $x = 3$ è $p_3(3) = \frac{23}{3}$.