ESERCITAZIONE 2 (02/11/2017)

1. Determinare la fattorizzazione LU della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 6 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

utilizzarla per risolvere il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} = [12, 9, 19, 12]^T$, per calcolare il determinante di A e la terza colonna della sua inversa. **Soluzione.**

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/5 & 1 & 0 & 0 \\ 2/5 & 3/19 & 1 & 0 \\ 3/5 & -3/19 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 19/5 & 0 & 14/5 \\ 0 & 0 & 6 & 22/19 \\ 0 & 0 & 0 & 111/19 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \det(LU) = \det(L) \cdot \det(U) = \det(U) = 666$$

$$\mathbf{x} = [2, 1, 2, 1]^T, \quad \mathbf{x^{(3)}} = [0, 0, 1/6, 0]^T$$

2. Risolvere mediante la fattorizzazione $PA = LU$ il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + 2x_4 = 2 \\ 4x_1 + x_3 + 4x_4 = 4 \\ 5x_1 + x_3 + 2x_4 = 4 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

e utilizzando i calcoli effettuati calcolare il determinante della matrice dei coefficienti, la sua inversa e il numero di condizionamento in norma 1 e ∞. **Soluzione.**

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/5 & 0 & 1 & 0 \\ 4/5 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/5 & 8/5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \frac{\det(L) \cdot \det(U)}{\det(P)} = \frac{-4}{(-1)^2} = -4$$

$$\mathbf{x} = [1, 1, -2, 1/2]^T, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & -1 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & -1/4 & 0 \end{bmatrix}$$