ESERCITAZIONE 4 (17/11/2017)

1. Dimostrare che il metodo di Gauss-Seidel applicato al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

è convergente. Calcolare i primi due passi del metodo usando come vettore iniziale $\mathbf{x}^0 = [1, -1, 0]^T$.

<u>**Soluzione.**</u>

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{G-S} = (D-E)^{-1}F = \begin{bmatrix} 0 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & 2/9 & 2/9 \\ 0 & -4/27 & -4/27 \end{bmatrix}$$

essendo $\rho(B_{G-S}) = \frac{2}{27} < 1$ il metodo di Gauss-Seidel converge.

Le prime due iterate sono:

$$\mathbf{x}^{(1)} = \left(1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{9}\right)^T, \quad \mathbf{x}^{(2)} = \left(\frac{14}{27}, -\frac{17}{81}, -\frac{43}{243}\right)^T.$$

2. Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

trovare i valori del parametro α tali che:

- A è non singolare;
- A è definita positiva;
- i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel convergono.

<u>**Soluzione.**</u>

- $\det(A) \neq 0$ per $\alpha \neq \pm 1, \pm 2$;
- essendo A simmetrica, sarà definita positiva quando tutti i suoi autovalori sono positivi. Si trova quindi che A è definita positiva per $1 < \alpha < 2$;

- i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel convergono per $1 < \alpha < 2$.

3. Data la matrice
$$A = \begin{bmatrix} \beta & 1/2 & 0 \\ 1/2 & \beta & 1/2 \\ 0 & 1/2 & \beta \end{bmatrix}$$
determinare i valori del parametro β tali che:

   - A è non singolare ;
   - A è definita positiva;
   - il metodo di Jacobi converge.

   Fissato $\beta = 2$ si calcolino le prime due iterate del metodo di Jacobi in corrispondenza al termine noto e al vettore iniziale
$$\mathbf{b} = (8, 3, 4)^T, \quad \mathbf{x} = (0, 0, 0)^T$$
.

   <u>**Soluzione.**</u>

   - A è non singolare per $\beta \neq 0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$;
   - A è definita positiva per $\beta > \frac{\sqrt{2}}{2}$;
   - il metodo di Jacobi converge quando $\rho(B_J) < 1$.
     Nel caso del metodo di Jacobi la matrice d'iterazione B è data da $D^{-1}(E + F)$ e nel nostro caso sarà
$$B_J = \begin{bmatrix} 1/\beta & 0 & 0 \\ 0 & 1/\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1/\beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2\beta} & 0 \\ -\frac{1}{2\beta} & 0 & -\frac{1}{2\beta} \\ 0 & -\frac{1}{2\beta} & 0 \end{bmatrix}$$
     e si ha che $\rho(B_J) < 1$ per $\beta > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

   Fissato $\beta = 2$, le prime due iterate sono
$$\mathbf{x}^{(1)} = (4, 3/2, 2)^T, \quad \mathbf{x}^{(2)} = \left(\frac{29}{8}, 0, \frac{13}{8}\right)^T.$$