Tutorato di CSMN AA 2018/2019

Esercitazione del 12/12/2018

1. *Esercizio 5, prova scritta di CSMN del 31/01/2018*

   Determinare la forma di Lagrange del polinomio che interpola la tabella

x_i	-1	0	1	2
y_i	7	1	-1	-17

   Calcolare il valore assunto dal polinomio nel punto di ascissa $x = -2$.

   SOLUZIONE.

   Il polinomio interpolante nella forma di Lagrange è

   $$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j L_j(x)$$

   dove gli $L_j(x)$, polinomi caratteristici di Lagrange dati da

   $$\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$$

   sono dei polinomi di grado n ben definiti. Nel nostro caso il polinomio interpolante sarà:

   $$p_3(x) = 7L_0(x) + L_1(x) - L_2(x) - 17L_3(x)$$

   con polinomi caratteristici

   $$L_0(x) = -\frac{1}{6}x(x-1)(x-2),$$

   $$L_1(x) = \frac{1}{2}(x^2-1)(x-2),$$

   $$L_2(x) = -\frac{1}{2}x(x+1)(x-2),$$

   $$L_3(x) = \frac{1}{6}x(x^2-1).$$

   Quindi

   $$p_3(x) = -\frac{7}{6}x(x-1)(x-2)+\frac{1}{2}(x^2-1)(x-2)+\frac{1}{2}x(x+1)(x-2)-\frac{17}{6}x(x^2-1)$$

Svolgendo i calcoli si trova

$$p_3(x) = -3x^3 + 2x^2 - x + 1$$

e valutandolo nel punto di ascissa $x = -2$ si ha

$$p_3(-2) = 35.$$

2. *Esercizio 3, prova scritta di CSMN del 23/03/2018*

   Determinare la forma di Lagrange del polinomio che interpola la funzione
   $$f(x) = \cos(x) - \sin(x)$$
   nei punti di ascissa $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ e valutarlo poi nel punto di ascissa $x = 1$.

   SOLUZIONE

   $$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{\pi}{4}, \quad x_2 = \frac{\pi}{2}$$
   $$y_0 = 1, \quad y_1 = 0, \quad y_2 = -1$$

   $$p_2(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) = L_0(x) - L_2(x)$$

   dove

   $$L_0(x) = \frac{8}{\pi^2}(x - \pi/4)(x - \pi/2), \quad L_2(x) = \frac{8}{\pi^2}x(x - \pi/4).$$

   Quindi il polinomio sarà dato da

   $$p(x) = -\frac{4}{\pi}x + 1$$

   e valutato il $x = 1$ è pari a $\frac{\pi-4}{\pi}$.

3. *Esercizio 5, prova scritta di CSMN del 04/07/2018*

   Costruire il polinomio che interpola la tabella di dati

x_i	0	1	3
y_i	3	-1	-3

sia in forma canonica che utilizzando la rappresentazione di Lagrange. Calcolare inoltre il valore assunto dai due polinomio nel punto di ascissa $x = 2$.

SOLUZIONE.

Il polinomio interpolante nella base canonica è dato da

$$p_2(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$$

imponendo le condizioni di interpolazione si ottiene il sistema lineare

$$\sum_{j=0}^{2} x_i^j a_j = y_i, \quad i = 0, 1, 2$$

la cui matrice dei coefficienti è la matrice di Vandermonde

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{bmatrix}.$$

Il sistema risultante, la cui soluzione fornisce appunto i coefficienti della combinazione lineare che fornisce l'espressione canonica del polinomio interpolante, quindi sarà

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Risolvendo tale sistema con l'algoritmo di Gauss con pivoting troviamo

$$a_0 = 3, \quad , a_1 = -5, \quad a_2 = 1$$

quindi il polinomio interpolante nella base canonica è

$$p_2(x) = x^2 - 5x + 3.$$

Per l'unicità del polinomio interpolante troviamo lo stesso risultato usando la rappresentazione di Lagrange.