ESERCITAZIONE (07/12/2017)

1. Determinare l'intervallo $[k, k+1]$ con k intero, che contenga la radice positiva dell'equazione
$$x^2 - \frac{3}{x} = 0.$$
Dire se la radice è singola o multipla giustificando la risposta e calcolare la prima iterazione del metodo di Newton a partire da entrambi gli estremi dell'intervallo determinato.

   Dire qual è l'ordine di convergenza del metodo giustificando la risposta.

   <u>**Soluzione.**</u>

   Procedendo alla ricerca dell'intervallo contenente la radice dell'equazione data col metodo grafico si trova che essa appartiene all'intervallo $[1, 2]$. La radice è semplice in quanto $f'(\alpha) > 0$ essendo $\alpha \in [1, 2]$. Le prime iterazioni del metodo di Newton con punti iniziali gli estremi dell'intervallo trovato sono:

   - $x_0 = 1$, $x_1 = \frac{7}{5}$
   - $x_0 = 2$, $x_1 = \frac{28}{19}$

   Il metodo ha ordine $p = 2$ in quanto la radice è semplice.

2. Determinare il più piccolo intervallo con estremi interi che contenga la radice positiva dell'equazione
$$x^3 - 3x - 3 = 0.$$
Dire se la radice è singola o multipla giustificando la risposta e calcolare le prime tre iterazioni del metodo di bisezione a partire dall'intervallo determinato.

   Che ordine di convergenza ha il metodo? Quale ordine di convergenza avrebbe il metodo di Newton?

   <u>**Soluzione.**</u>

   Sempre tramite il metodo grafico si trova che la radice α appartiene all'intervallo $(2, 3)$. Essendo $f'(\alpha) > 0$, la radice è singola. Le prime tre iterazioni del metodo di bisezione sono:
$$c_0 = \frac{5}{2}, \quad c_1 = \frac{9}{4}, \quad c_2 = \frac{17}{8}.$$
Il metodo di bisezione ha ordine $p = 1$, mentre il metodo di Newton avrebbe ordine $p = 2$ in quanto la radice è semplice.

3. Determinare l'intervallo $[k, k+1]$ con k intero che contenga la radice positiva dell'equazione

$$e^x - 1 - 2x = 0.$$

Calcolare le prime due iterazioni del metodo di bisezione a partire dall'intervallo determinato e le prime due iterazioni del metodo di Newton a partire dall'estremo destro dell'intervallo trovato. Dire qual è l'ordine di convergenza dei due metodi giustificando la risposta.

Soluzione.

Tramite il metodo grafico si trova che $\alpha \in [1, 2]$. Le iterazioni del metodo di bisezione partendo dall'intervallo trovato sono:

$$c_0 = \frac{3}{2}, \quad c_1 = \frac{5}{4}, \quad c_2 = \frac{9}{8},$$

mentre le iterazioni del metodo di Newton a partire da $x_0 = 2$ sono

$$x_1 \simeq 1,56, \quad x_2 \simeq 1,33.$$

Il metodo di bisezione ha sempre ordine $p = 1$, mentre il metodo di Newton ha ordine di convergenza $p = 2$ in quanto la derivata prima della funzione non lineare data $f'(x) = e^x - 2$ si annulla nel punto $x = \ln(2)$ che non appartiente all'intervallo determinato (quindi la radice è semplice).

4. Determinare l'intervallo $[k, k+1]$ con k intero che contenga una radice dell'equazione

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 2x - 1 = 0$$

Calcolare le prime due iterazioni del metodo di bisezione a partire dall'intervallo determinato e le prime due iterazioni del metodo di Newton a partire dall'estremo destro dell'intervallo trovato. Dire qual è l'ordine di convergenza dei due metodi giustificando la risposta.

Soluzione. Col metodo grafico si trova che $\alpha \in [0, 1]$. Le iterazioni del metodo di bisezione sono:

$$c_0 = \frac{1}{2}, \quad c_1 = \frac{1}{4}, \quad c_2 = \frac{3}{8}.$$

Il metodo di Newton a partire dall'estremo destro dell'intervallo determinato genera le iterate

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{2}{\pi + 4} \simeq 0.28.$$

L'ordine di convergenza del metodo di bisezione è sempre $p = 1$, mentre quello di Newton ha convergenza quadratica (cioè ordine di convergenza $p = 2$) in quanto la radice α è semplice dato che $f'(x) = \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 2$ è positiva per $\alpha \in [0, 1]$.