Tutorato di CSMN AA 2018/2019

Esercitazione del 14/12/2018

1. Si considerino le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \alpha \\ 0 & -2 & 0 \\ -\alpha & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & \beta & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -\gamma & 0 & \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ \gamma & 0 & \gamma \end{bmatrix}.$$

   Si determinino i valori dei parametri α e β che rendono le matrici A eB una l'inversa dell'altra e i valori di γ he rendono C una matrice ortogonale. Assegnato a ciascun parametro uno dei valori trovati, si calcoli il numero di condizionamento delle tre matrici in norma 1, 2 e ∞ e si precisi il raggio spettrale di A. Infine, si risolva nel modo più conveniente il sistema lineare $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $M = BC$ e $\mathbf{b} = (1, 1, 1)^T$.

   SOLUZIONE.

   Le matrici A e B sono una l'inversa dell'altra per $\alpha = 1$ e $\beta = -\frac{5}{2}$.

   C è ortogonale per $\gamma = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Assegnati i valori dei parametri trovati, i numeri di condizionamento sono

$$k_1(A) = k_\infty(A) = k_1(B) = k_\infty(B) = \frac{9}{5}, \quad k_2(A) = k_2(B) = \sqrt{\frac{5}{4}}.$$

   Essendo C ortogonale $k_2(C) = 1$. Mentre i numeri di condizionamento in norma 1 e ∞ sono

$$k_1(C) = 2 = k_\infty(C).$$

   Essendo lo spettro di A dato da $\sigma(A) = \{-2, 2 \pm i\}$, il raggio spettrale saraà $\rho(A) = \sqrt{5}$.

$$\mathbf{x} = M^{-1}\mathbf{b} = (BC)^{-1}\mathbf{b} = C^{-1}B^{-1}\mathbf{b} = C^T A\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ -2 \\ 2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

2. *Esercizio 4, prova scritta del 15/02/2018*

   Si calcoli la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice dei coefficienti del sistema

$$\begin{cases} x_1 + \frac{7}{2}x_3 - 3x_4 = \frac{3}{4} \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = \frac{7}{2} \\ -\frac{4}{3}x_1 - \frac{11}{6}x_2 - \frac{4}{3}x_3 + \frac{19}{6}x_4 = -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{7}{4}x_3 - x_4 = \frac{3}{8} \end{cases}$$

e utilizzarla per risolvere il sistema e per calcolare il determinante della matrice dei coefficienti.

SOLUZIONE

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

la soluzione del sistema e il determinante della matrice A dei coefficienti ottenuti sfruttando la fattorizzazione $PA = LU$ trovata sono

$$\mathbf{x} = \left(2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T, \quad \det(A) = 8.$$

3. *Esercizio 2, prova scritta del 3/09/2018*

   Assegnati

   $$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ \alpha & 4 & \alpha \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \text{e} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   dire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la matrice A è invertibile e per quali valori il metodo di Gauss-Seidel risulta convergente se applicato al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Posto $\alpha = -2$ si calcolino le prime due iterazioni del metodo di Gauss-Seidel utilizzando il vettore iniziale $\mathbf{x}^0 = (0, 0, 0)^T$.

   SOLUZIONE. A è invertibile per $\alpha \neq 8$. Il metodo di Gauss-Seidel è convergente per $-8 < \alpha < 8$. Le due iterate sono

   $$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 9/8 \\ -1/32 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} -1/32 \\ 31/32 \\ 7/64 \end{bmatrix}.$$

4. Costruire il polinomio che interpola la tabella di dati

x_i	-2	-1	0	1
y_i	1	0	1	2

sia in forma canonica che usando la rappresentazione di Lagrange. Valutare poi i polinomi nel punto di ascissa $x = -2$.

SOLUZIONE.

Il polinomio interpolante nella base canonica è dato da

$$p_3(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$$

imponendo le condizioni di interpolazione si ottiene il sistema lineare

$$\sum_{j=0}^{2} x_i^j a_j = y_i, \quad i = 0, 1, 2$$

la cui matrice dei coefficienti è la matrice di Vandermonde che nel nostro caso è data da

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Il sistema risultante, la cui soluzione fornisce appunto i coefficienti della combinazione lineare che fornisce l'espressione canonica del polinomio interpolante, quindi sarà

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Risolvendo tale sistema con l'algoritmo di Gauss con pivoting troviamo

$$a_0 = 1, \quad a_1 = \frac{4}{3}, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -\frac{1}{3}$$

quindi il polinomio interpolante nella base canonica è

$$p_3(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{3}x + 1$$

Per l'unicità del polinomio interpolante troveremo lo stesso polinomio usando la rappresentazione in forma di Lagrange:

$$p_3(x) = L_0(x) + L_2(x) + 2L_3(x),$$

dove i polinomi caratteristici di Lagrange sono dati da

$$L_0(x) = -\frac{1}{6}x(x^2-1), \quad L_2(x) = -\frac{1}{2}(x+2)(x^2-1), \quad L_3(x) = \frac{1}{6}x(x+1)(x+2).$$

5. *Esercizio 5, prova scritta del 3/09/2018*

Determinare l'intervallo $[k, k+1]$, con $k \in \mathbb{Z}$ che contiene la radice positiva dell'equazione

$$\cos(4x) - x^2 + 1 = 0$$

Si indichi l'approssimazione che si ottiene applicando tre iterazioni del metodo di bisezione, partendo dall'intervallo determinato. Si indichi inoltre l'approssimazione della radice che si ottiene applicando due iterazioni del metodo di Newton, partendo dall'estremo destro dell'intervallo determinato.

SOLUZIONE.

La radice α appartiene all'intervallo $[0, 1]$. Le approssimazioni che si ottengono applicando tre iterazioni del metodo di bisezione sono

$$x_0 = 0.5, \quad x_1 = 0.65, \quad x_2 = 0.625.$$

Le approssimazioni che si ottengono applicando due iterazioni del metodo di Newton partendo da $x_0 = 1$ sono invece

$$x_1 = 1.6363, \quad x_2 = 1.4711$$

che non appartengono all'intervallo $[0, 1]$. Infatti non essendo soddisfatta l'ipotesi sul non cambio di segno della derivata seconda del teorema (visto a lezione) che assicura la convergenza per ogni x_0 nell'intervallo considerato il punto $x_0 = 1$ non fornisce l'approssimazione cercata. Scegliendo invece, ad esempio, come punto iniziale $x_0 = \frac{1}{2}$ troviamo come approssimazioni

$$x_1 = 0.527, \quad x_2 = 0.5757.$$