ESERCITAZIONE (12/12/2017)

1. Costruire, utilizzando la rappresentazione di Lagrange, il polinomio che interpola la seguente tabella di dati

x_i	-1	0	1	2
y_i	9	6	3	6

Calcolare inoltre il valore assunto dal polinomio nel punto di ascissa $x = -2$.

<u>Soluzione.</u>

Il polinomio interpolante nella forma di Lagrange è

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j L_j(x)$$

dove gli $L_j(x)$, polinomi caratteristici di Lagrange sono dati da

$$\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}.$$

Nel nostro caso si ha $n = 3$ e quindi il polinomio interpolante sarà:

$$p_3(x) = 9L_0(x) + 6L_1(x) + 3L_2(x) + 6L_3(x)$$

con polinomi caratteristici

$$L_0(x) = -\frac{1}{6}x(x-1)(x-2),$$

$$L_1(x) = \frac{1}{2}(x^2-1)(x-2),$$

$$L_2(x) = -\frac{1}{2}x(x+1)(x-2),$$

$$L_3(x) = \frac{1}{6}x(x^2-1).$$

Quindi

$$p_3(x) = -\frac{3}{2}x(x-1)(x-2)+3(x^2-1)(x-2)-\frac{3}{2}x(x+1)(x-2)+x(x^2-1)$$

$$p_3(-2) = 6.$$

2. Determinare, usando la base canonica il polinomio che interpola la tabella di dati

x_i	-2	0	2
y_i	0	-1	0

e calcolare il suo valore nel punto di ascissa $x = 1$.

Soluzione.

Il polinomio interpolante nella base canonica è dato da

$$p_2(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$$

imponendo le condizioni di interpolazione si ottiene il sistema lineare

$$\sum_{j=0}^{2} x_i^j a_j = y_i, \quad i = 0, 1, 2$$

la cui matrice dei coefficienti è la matrice di Vandermonde

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{bmatrix}.$$

Il sistema risultante, la cui soluzione fornisce appunto i coefficienti della combinazione lineare che fornisce l'espressione canonica del polinomio interpolante, quindi sarà

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Risolvendo tale sistema con l'algoritmo di Gauss con pivoting troviamo

$$a_0 = -1, \quad , a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{1}{4}$$

quindi il polinomio interpolante nella base canonica è $p_2(x) = -1 + \frac{1}{4}x^2$ e $p_2(1) = -\frac{3}{4}$.

3. Determinare la forma di Lagrange del polinomio che interpola la funzione $\sin(2x)$ nei punti di ascissa $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ e valutarlo nel punto di ascissa $x = -\frac{\pi}{4}$.

Soluzione.

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{\pi}{4}, \quad x_2 = \frac{\pi}{2}$$
$$y_0 = \sin(2x_0) = 0, \quad y_1 = \sin(2x_1) = 1, \quad y_2 = \sin(2x_2) = 0$$

$$p_2(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) = L_1(x)$$

dove

$$L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = -\frac{16}{\pi^2} x(x - \pi/2)$$

e

$$p_2\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -3.$$

4. Costruire il polinomio che interpola la seguente tabella di dati

x_i	0	1	2
y_i	1	1	2

sia nella base canonica che nella forma di lagrange. utilizzare poi la forma di Lagrange per calcolare il polinomio interpolante nel punto di ascissa $x = -1$.

Soluzione.

Analogamente a quanto fatto nell'esercizio 2, per determinare il polinomio interpolante nella base canonica, occorre determinare i coefficienti lineari di tale combinazione lineare risolvendo tramite Gauss il sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

la cui soluzione è

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

da cui ricaviamo $p_2(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2$. In forma di Lagrange:

$$p_2(x) = L_0(x) + L_1(x) + 2L_2(x)$$

dove

$$L_0(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x-2), \quad L_1(x) = -x(x-2), \quad L_2(x) = \frac{1}{2}x(x-1)$$

da cui si ottiene appunto $p_2(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2$.