

Tutorato di CSMN AA 2018/2019

Esercitazione del 10/01/2019

1. Calcolare il punto medio del segmento $[a, b]$ di estremi $a = 1.45705$ e $b = 1.45744$ mediante le formule

$$c_1 = \frac{a+b}{2} \quad \text{e} \quad c_2 = a + \frac{b-a}{2}$$

in un sistema in virgola mobile in base 10 con 5 cifre significative.
SOLUZIONE.

$$\text{fl}(a) = 0.14571 \cdot 10, \quad \text{fl}(b) = 0.14574 \cdot 10;$$

$$\text{fl}(c_1) = 0.14573 \cdot 10 = \text{fl}(c_2), \quad \rho \simeq 3.7742 \cdot 10^{-3}.$$

2. Calcolare mediante la fattorizzazione $PA = LU$ l'inversa della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

SOLUZIONE.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 2/3 & -2/5 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 5/3 & 3 \\ 0 & 0 & 6/5 \end{bmatrix},$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -3/2 \\ 1/3 & -2/3 & 5/6 \end{bmatrix}.$$

3. Assegnate le matrici

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 6 & 2 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} b & 0 & 0 & 0 \\ -b & b & 0 & 0 \\ b & -1 & b & 0 \\ -b & -a & a & b \end{bmatrix}$$

determinare i valori dei parametri a e b che rendono la matrice M l'inversa di L . Assegnati i valori dei parametri trovati, calcolare il condizionamento in norma 1 e ∞ delle matrici L , M e $A = L^T L$. Dire

infine quali sono gli autovalori di L e di L^3 e, posti $a = 1$ e $b = 0$ calcolare la norma 2 di M .

SOLUZIONE

$$a = -\frac{3}{2}, \quad b = \frac{1}{2}, \quad k_1(L) = k_1(M) = 36, \quad k_\infty(L) = k_\infty(M) = 64,$$

$$k_1(A) = k_\infty(A) = 986, \quad \sigma(L) = \{2, 2, 2, 2\}, \quad \sigma(L^3) = \{8, 8, 8, 8\}, \\ \|M\|_2 = 1.618.$$

4. Si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \alpha & 1 \\ \alpha & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si stabilisca per quali valori del parametro α la matrice A è invertibile e per quali è definita positiva. Si studi al variare del parametro α la convergenza del metodo di Jacobi applicato al sistema dato. Posto $\alpha = 1$, si calcolino infine le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 1, 0)^T$.

SOLUZIONE.

A è invertibile per $\alpha \neq \pm 1$, ed è definita positiva per $-\sqrt{3} < \alpha < \sqrt{3}$. Il metodo di Jacobi converge per $-\sqrt{3} < \alpha < \sqrt{3}$. Le due iterate del metodo di Gauss-Seidel sono

$$\mathbf{x}^{(1)} = (0, 1/2, 0)^T = \mathbf{x}^{(2)}.$$

5. *Esercizio 4, prova scritta del 23/03/18*

Determinare l'intervallo $[k, k + 1]$, con k intero, che contiene la radice positiva dell'equazione

$$\cos(2x) - \frac{1}{2}x^2 + 4 = 0.$$

Si indichi l'approssimazione che si ottiene applicando tre iterazioni del metodo di bisezione, partendo dall'intervallo determinato. Si indichi inoltre l'approssimazione della radice che si ottiene applicando due iterazioni del metodo di Newton, partendo dall'estremo destro dell'intervallo determinato. Qual è l'ordine di convergenza dei metodi utilizzati?

SOLUZIONE.

L'intervallo contenente la radice è $[3, 4]$. Le tre approssimazioni ottenute col metodo di bisezione sono

$$x_0 = 3.5, \quad x_1 = 3.25, \quad x_2 = 3.125;$$

quelle ottenute col metodo di Newton partendo da $x_0 = 4$

$$x_1 = 3.3066, \quad x_2 = 3.1749.$$

L'ordine di convergenza del metodo di bisezione è $p = 1$ mentre quello di Newton è $p = 2$ essendo la radice semplice.

6. Costruire il polinomio che interpola la seguente tabella di dati

x_i	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
y_i	-1	1	2	-3

sia in forma canonica che usando la rappresentazione di Lagrange. Valutare poi il polinomio nel punto di ascissa $x = -1$.

SOLUZIONE.

$$p_3(x) = -\frac{20}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{14}{3}x + 1, \quad p_3(1) = 1.$$