ESERCITAZIONE (11/01/2018)

1. Siano $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & d \\ b & c & 0 \\ d & 0 & a \end{bmatrix}.$$

Si stabilisca per quali valori reali dei parametri A è simmetrica e per quali è definita positiva. Si consideri successivamente il caso simmetrico con $a = 1$ e $c = \frac{1}{2}$; si dica per quali valori del parametro d il metodo di Jacobi risulta convergente se applicato al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} = (1, 2, 1)^T$. Si calcoli infine le prime due iterazioni del metodo a partire dal vettore $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1, 1)^T$.

Soluzione.

A è simmetrica se $b = 0$. Risulta essere definita positiva per $d < a$ e $d > -a$.

Ponendo $a = 1$ e $c = \frac{1}{2}$ con $b = 0$ (caso simmetrico) si ottiene la matrice di iterazione del metodo di Jacobi

$$B_J = D^{-1}(E + F) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -d \\ 0 & 0 & 0 \\ -d & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Per determinare i valori del parametro d per cui il metodo di Jacobi risulta convergente occorre vedere per quali valori di d il raggio spettrale di B_J è minore di 1. Calcolando gli autovalori si trova

$$\sigma(B_J) = \{0, \pm d\}$$

da cui segue che $\rho(B_J) < 1$ sse $|d| < 1$ e cioè per $-1 < d < 1$.

Lo schema iterativo è dato da

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = B_J \mathbf{x}^{(k)} + f_J$$

dove $f_J = D^{-1}\mathbf{b} = (1, 4, 1)^T$. Quindi le prime due iterazioni del metodo sono

$$\mathbf{x}^{(1)} = (1 - d, 4, 1 - d)^T, \quad \mathbf{x}^{(2)} = (d^2 - d + 1, 4, d^2 - d + 1)^T$$

.

2. Determinare l'intervallo $[k, k+1]$, con k intero, che contenga la radice dell'equazione non lineare

$$\ln(x) - 5 + x = 0.$$

Calcolare le prime tre iterazioni del metodo di bisezione a partire dall'intervallo determinato e le prime due iterazioni a partire dall'estremo destro dell'intervallo.

<u>**Soluzione.**</u>

Tramite il metodo grafico si trova che la radice α appartiene all'ntervallo $[3, 4]$. Le prime tre iterazioni del metodo di bisezione sono:

$$c_0 = \frac{7}{2}, \quad c_1 = \frac{15}{4}, \quad c_2 = \frac{29}{8}.$$

Mentre le prime due iterazioni del metodo di Newton sono

$$x_1 \simeq 3.7, \quad x_1 \simeq 3.69$$

3. Esprimere nella forma di Lagrange e in forma canonica il polinomio che interpola la funzione $f(x) = \log_2(x)$ nei punti di ascissa $\frac{1}{2}, 1, 2$.

<u>**Soluzione.**</u>

La tabella dei punti di interpolazione è data da

x_i	1/2	1	2
y_i	-1	0	1

Il polinomio interpolante di secondo grado in forma di Lagrange, si otterrà come

$$p_2(x) = -L_0(x) + L_1(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 3x - \frac{7}{3}$$

essendo

$$L_0(x) = \frac{2}{3}(x-1)(x-2), \quad L_1(x) = \frac{4}{3}(x-1)(x-2).$$

Lo stesso risultato si ottiene ovviamente (Teorema 8.3 pag 202 del libro di testo consigliato) rappresentando il polinomio nella base canonica.

4. Calcolare le prime due iterazioni risultanti dall'applicazione dell'algoritmo di Gauss Seidel al sistema lineare

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases}$$

utilizzando il vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = (0,0,0)^T$. Dire se il metodo è convergente.

<u>**Soluzione.**</u>

$$B = (D-E)^{-1}F = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & -1/2 \\ 0 & -1/8 & 1/4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}^{(1)} = (3, 5/2, 7/4)^T, \quad \mathbf{x}^{(2)} = (7/4, 9/4, 15/8)^T.$$

il metodo risulta convergente essendo $\rho(B) = 1/2 < 1$.

5. Risolvere mediante la fattorizzazione $PA = LU$ il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -4 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -6 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

e utilizzando i calcoli effettuati calcolare il determinante della matrice dei coefficienti e la terza colonna della sua inversa.

<u>**Soluzione.**</u>

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{5} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{8}{5} & \frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \frac{\det(U)}{\det(P)} = 12$$

$$\mathbf{x} = [2, 1, -2, -1]^T, \quad \mathbf{x}^{(\mathbf{3})} = [2/3, -1/2, 0, 1/6]^T$$