Lezione 2

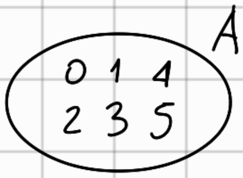
04/10/24

DEFINIZIONE

Una $\boxed{\text{PROPOSIZIONE}}$ è un enunciato per cui si può stabilire il suo valore di verità.

CONNETTIVI LOGICI

$\sim \square$	NON
$\square \wedge \square$	E
$\square \vee \square$	O
$\square \Rightarrow \triangle$	SE $\square$ ALLORA $\triangle$ IMPLICA
$\square \Leftrightarrow \triangle$	$\square$ SE E SOLO SE $\triangle$



$p_1 : 1 \in A$ V

$p_2 : 2 \in A$ V

$p_3 : 7 \in A$ F

$(1 \in A) \wedge (2 \in A)$ V

$(1 \in A) \wedge (7 \in A)$ F

$[(1 \in A) \vee (7 \in A)]$ V

p_1	p_2	$p_1 \wedge p_2$	$p_1 \vee p_2$	$p_1 \Rightarrow p_2$	$p_1 \Leftrightarrow p_2$	$\sim p_1$	
V	V	V	V	V	V	F	
F	V	F	V	V	F	V	
→ V	F	F	V	F	F	F	
F	F	F	F	V	V	V	

$\underbrace{\text{Se domani è bel tempo}}_{p_1}$ $\underbrace{\text{vengo a trovarti}}_{p_2}$

CONDIZIONE SUFFICIENTE AFFINCHÉ p_2 È p_1 $\qquad p_1 \Rightarrow p_2$

ESERCIZIO

$p_2 \vee (\sim p_1)$

p_1	p_2	$\sim p_1$	$p_2 \vee (\sim p_1)$
V	V	F	V
F	V	V	V
V	F	F	F
F	F	V	V

Solo se $\underbrace{\text{domani è bel tempo}}_{p_1}$ $\underbrace{\text{vengo a trovarti}}_{p_2}$

$p_1 \Leftarrow p_2$

CONDIZIONE NECESSARIA AFFINCHÉ p_2 È p_1

ESEMPIO

Solo se è giorno guido la macchina

Se $\overbrace{\text{il Cagliari vince la prossima partita}}^{p_1}$ $\overbrace{\text{mi tingo i capelli rossoblu}}^{p_2}$ $\underbrace{\text{e ti regalo 100 €}}_{p_3}$

$p_1 \Rightarrow (p_2 \wedge p_3)$

Cosa posso dire su p_1 e p_3 se so che p_2 è vera?

COSTRUISCO UNA TAVOLA DI VERITÀ

p_1	p_2	p_3	$p_2 \wedge p_3$	$p_1 \Rightarrow (p_2 \wedge p_3)$
$\boxed{V}$	V	$\boxed{V}$	V	V
$\boxed{F}$	V	$\boxed{V}$	V	V
V	F	V	F	F
F	F	V	F	V
V	V	F	F	F
$\boxed{F}$	V	$\boxed{F}$	F	V
V	F	F	F	F
F	F	F	F	V

SONO DIVERSI

→ NON POSSO CONCLUDERE NULLA

Cosa posso dire se ho i capelli normali? (CIOÈ p_2 FALSA)

p_1	p_2	p_3	$p_2 \wedge p_3$	$p_1 \Rightarrow (p_2 \wedge p_3)$
V	V	V	V	V
F	V	V	V	V
V	F	V	F	F
$\boxed{F}$	F	$\boxed{V}$	F	V
V	V	F	F	F
F	V	F	F	V
V	F	F	F	F
$\boxed{F}$	F	$\boxed{F}$	F	V

p_1 è FALSA

p_3 NON SI SA

$$p_1 \Rightarrow p_2$$
$$\rightarrow \qquad \leftarrow$$
$$(\sim p_2) \Rightarrow (\sim p_1)$$

$$p_1 \Rightarrow p_2$$

DIMOSTRAZIONE PER ASSURDO $(\sim p_2) \Rightarrow (\sim p_1)$

QUANTIFICATORI

$\exists$ ESISTE

$\forall$ PER OGNI

Servono per costruire delle proposizioni

PROPOSIZIONE: Esiste un numero naturale pari

$$\underbrace{\exists m \in \mathbb{N} : m \in \mathbb{P}}$$

→ $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$

$\mathbb{P} = \{m \in \mathbb{N} : m \text{ è PARI}\}$

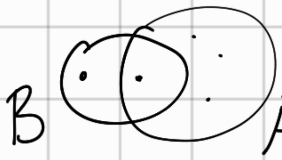
$2 \in \mathbb{P}$ SÌ

$\Downarrow$

VERO

$p_2 \left[\underbrace{\forall m \in \mathbb{N} : m > -4} \right]$ È VERA ?

$\sim p_2 \left[\exists m \in \mathbb{N} : m \leq -4 \right]$



Ricordo la DEFINIZIONE

$B \subseteq A$ SE E SOLO SE $\forall x \in B \Rightarrow x \in A$

$B \not\subseteq A$ SIGNIFICA $\sim(\forall x \in B \Rightarrow x \in A)$

$$\downarrow$$

$$\exists x \in B : x \notin A$$

DEFINIZIONE

I numeri naturali sono $\mathbb{N} = \{0, 1, 2 \dots\}$

Sia $m \in \mathbb{N}$ m è $\boxed{\text{PARI}}$ $\Leftrightarrow$ $\underbrace{\exists k \in \mathbb{N} : m = 2k}$ $\mathbb{P} = \{m \in \mathbb{N} : m \text{ è PARI}\}$

m è $\boxed{\text{DISPARI}}$ $\Leftrightarrow$ $\underbrace{\exists k \in \mathbb{N} : m = 2k+1}$ $\mathbb{D} = \{m \in \mathbb{N} : m \text{ è DISPARI}\}$

Voglio dimostrare

28 NON è DISPARI $\forall k \in \mathbb{N}$ $m \neq 2k+1$

PROPOSIZIONE *

$\mathbb{P} = C_{\mathbb{N}}(\mathbb{D})$ NO DIM

PROPOSIZIONE

28 NON È DISPARI

DIMOSTRAZIONE

$\exists 14 : 2 \cdot 14 = 28 \Rightarrow$ 28 È PARI $\underset{*}{\Rightarrow}$ 28 NON È DISPARI

$28 \in \mathbb{P} \Rightarrow 28 \notin \mathbb{D}$ $\square$

PROPOSIZIONE

La somma tra numero pari e un numero dispari è dispari

$$[(x \in \mathbb{P}) \wedge (y \in \mathbb{D})] \Rightarrow (x+y \in \mathbb{D})$$

$$x \in \mathbb{P} \rightarrow \exists k_1 \in \mathbb{N} : x = 2k_1$$

$$y \in \mathbb{D} \rightarrow \exists k_2 \in \mathbb{N} : y = 2k_2 + 1$$

$$x+y = 2k_1 + (2k_2+1) = (2k_1 + 2k_2) + 1 = 2\underbrace{(k_1+k_2)}_{k_3 \in \mathbb{N}} + 1$$

$\exists k_3 \in \mathbb{N} : x+y = 2k_3 + 1 \Rightarrow x+y$ è DISPARI (per definizione)

PER ESERCIZIO

[La somma] / [Il prodotto] tra un numero [pari] / [dispari] e un numero [pari] / [dispari] è [pari] / [dispari]

DEFINIZIONE

Siano $n, m \in \mathbb{N}$ n $\boxed{\text{È DIVISORE DI}}$ m $\Leftrightarrow$ (OPPURE m È DIVISIBILE PER n)

$$\exists k \in \mathbb{N} \quad n \cdot k = m$$

SI INDICA CON $n \mid m$

ESEMPIO 4 è DIVISORE DI 36

infatti

$\exists \underset{\mathbb{N}}{\underset{\cap}{9}} : \quad 4 \cdot 9 = 36$ ✓

PROPOSIZIONE

NON È VERO CHE UN NUMERO PARI È NECESSARIAMENTE DIVISIBILE PER 4

$$\sim \left[(p_1 \in \mathbb{P}) \Rightarrow (4 | p_1) \right]$$

$$\sim \left[\forall p_1 \in \mathbb{P} \quad 4 | p_1 \right]$$

$$\underbrace{\exists p_1 \in \mathbb{P}} : \quad 4 \nmid p_1$$

$$\sim \left[\exists k_2 \in \mathbb{N} : \quad 4 \cdot k_2 = p_1 \right]$$

CI BASTA TROVARE UN NUMERO $p_1 \in \mathbb{P}$ tale che NON SIA DIVISIBILE PER 4.

Scelgo $p_1 = 2$ • 2 è PARI SÌ $\exists k_1 = 1 \in \mathbb{N} : \quad 2 \cdot 1 = 2$ ✓

Come faccio a dimostrare che $4 \nmid 2$? Dovrei provarli tutti.

USO UNA PROPOSIZIONE (CHE NON DIMOSTRO

Se un numero n un divisore di un numero m allora n è minore o uguale a m

CIOÈ $(n | m) \Rightarrow (n \leq m)$

Quindi concludo che $(n > m) \Rightarrow n \nmid m$

$$4 > 2 \Rightarrow 4 \nmid 2$$

$\square$