

ESEMPIO

Abbiamo 3 carte



Poggio una carta sul tavolo, vedo che è blu,
 Qual è la probabilità che anche il retro sia blu?

CALCOLO COMBINATORIO CAP 6

Sia A insieme, $\#A = n$ se A ha n elementi

Definizione

Una **PERMUTAZIONE** è una sequenza ordinata di elementi di A in cui ogni elemento compare una e una sola volta
 Si indica con P_n

ESEMPIO

3	2	1
---	---	---

 $A = \{a, b, c\}$
 $= \{b, c, a\}$

(a, b, c)

(a, c, b)

(b, a, c)

(b, c, a)

(c, a, b)

(c, b, a)

$$P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1$$

DEFINIZIONE [FATTORIALE]

$$0! = 1 ; \quad \forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad m! = m \cdot (m-1)! \\ = m \cdot (m-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

DEFINIZIONE [DISPOSIZIONI]

Sia $k \leq m$ numero di posti (lunghezza della sequenza)
Una **DISPOSIZIONE** è una sequenza ordinate di k elementi di A

ESEMPIO

$$\boxed{m} \quad \boxed{m-1}$$

$$A = \{a, b, c\}$$

$$\left[\begin{array}{l} (a, b) \\ (a, c) \\ (b, c) \\ (b, a) \\ (c, a) \\ (c, b) \end{array} \right]$$

$$D_{m,k} = m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-k+1) \\ = \frac{m!}{(m-k)!} = \frac{m(m-1) \dots (m-k+1)(m-k)!}{(m-k)!}$$

↑

$$m=6 \\ k=3$$

$$D_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \\ = \frac{6!}{3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 120$$

Definizione [COMBINAZIONI]

Le **COMBINAZIONI** di k elementi in un insieme di m sono il numero di sottoinsiemi di k elementi presi da un insieme di m elementi.

NOTAZIONE

$$C_{m,k} = \binom{m}{k}$$

m SU k

DOVE
NON CONTA L'ORDINE

$$\binom{m}{k} = C_{m,k} = \frac{D_{m,k}}{P_k} = \frac{\frac{m!}{(m-k)!}}{k!} = \frac{m!}{k!(m-k)!}$$

$$\binom{4}{2} = C_{4,2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 6$$

m elementi:

PERMUTAZIONI

DISPOSIZIONI

COMBINAZIONI

$k \leq m$

QUANTI POSTI

m

k

k

CONTA L'ORDINE?

SI

SI

NO

$$P_m = m!$$

$$D_{m,k} = \frac{m!}{(m-k)!}$$

$$C_{m,k} = \frac{m!}{(m-k)! k!}$$

ESEMPIO

Ho una cartina dell'Italia, voglio colorare ogni regione diversamente ho a disposizione 50 colori.

Quante possibili cartine diverse posso fare?

$$D_{50,20} = \frac{50!}{30!} = \frac{50 \cdot 49 \cdot 48 \cdots 31 \cdot 30!}{30!} = 3.4398 \cdot 10^{33}$$

ESEMPIO

Quante possibilità ci sono per i pin di una carte di credito?

k = 5 posti

m = 10

→ DISPOSIZIONI CON RIPETIZIONE!

Perché posso usare la stessa cifra diverse volte

Se posso ripetere 611 elementi 10^5



$$D_{m,k}^r = \binom{m+k}{m} \leftarrow \begin{array}{l} \text{LUNGHEZZA SEQUENZA} \\ \text{CIFRE A DISPOSIZIONE} \end{array}$$

COMBINAZIONI CON RIPETIZIONE

$$C_{m,k}^r = \binom{m+k-1}{k}$$

ESEMPIO

Ho rose, garofani. Quanti mazzi di 4 fiori posso fare?

$$\begin{array}{l} m = 2 \\ k = 4 \end{array}$$

$$C_{2,4}^r = \binom{4+2-1}{4} = \binom{5}{4} = \frac{5!}{4! 1!} = \frac{5 \cdot 4!}{4!} = 5$$

rrrr
rrrg
rrgg
rggg
gggg

NOTA: QUI K PUO' ESSERE ANCHE MAGGIORE DI M (PERCHE' POSSIAMO RIPETERE GLI ELEMENTI)

SE HO ANCHE TULIPANI quanti mazzi di 7 fiori posso fare?

$$C_{3,7}^r = \binom{9}{7} = \frac{9!}{7! 2!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7!}{7! \cdot 2} = 36$$

PERMUTAZIONI CON RIPETIZIONE

Quanti sono i possibili anagrammi della parola STATISTICA?
Se ho una sequenza di m elementi: dove uno di essi si ripete k_1 volte un altro k_2 volte... e uno k_r volte.

$$P_m^{k_1, k_2, \dots, k_r} = \frac{m!}{k_1! \cdot \dots \cdot k_r!}$$

$$P_{10}^{2,3,2,2} = \frac{10!}{2!3!2!2!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3!} = 75600$$

m numero di elementi, k lunghezza sequenza

	PERMUTAZIONI	DISPOSIZIONI	COMBINAZIONI
QUANTI POSTI	m	k	k
CONTA L'ORDINE?	SI'	SI'	NO
SEMPlici	$P_m = m!$	$D_{m,k} = \frac{m!}{(m-k)!}$	$\binom{m}{k} = C_{m,k} = \frac{m!}{(m-k)! k!}$
CON RIPETIZIONE	$P_m^{k_1 \dots k_r} = \frac{m!}{k_1! \dots k_r!}$	$D_{m,k}^r = m^k$	$C_{m,k}^r = \binom{m+k-1}{k}$

TARGHE XX 000 XX
 Quante possibilità abbiamo?

$$\frac{(m+k-1)!}{k! (m-1)!}$$

Come possiamo scegliere i 3 numeri?

$$D_{10,3}^r = 10^3 = 1000$$

Come posso scegliere le 4 lettere?

$$26^4 = 456976$$

Risposte 456 976 000 TARGHE

A 0,123456789
 B

ESERCIZIO

Hai un pezzo di ogni moneta (euro) esistente
e banconota

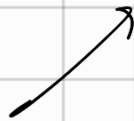
Quante cifre puoi pagare usando al massimo 3 pezzi?

Ho 15 pezzi me devo prendere 3 Non conta l'ordine, non posso ripetere

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \binom{15}{3} = \frac{15!}{3!(15-3)!} = \frac{15!}{3!12!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 12!} = 455$$

$$\binom{15}{2} =$$

$$\binom{15}{1} =$$



PER CASA