Lezione 4

08/10/24

$\mathbb{N} = \{\text{numeri naturali}\} = \{0, 1, 2, \dots\}$ $\quad +, \cdot$

$\mathbb{Z} = \{\text{numeri interi}\} = \mathbb{N} \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\}$ $\quad + \; (-) \; \cdot$

$n - m = n + (-m)$

dato $A \subseteq \mathbb{Z}$ definisco

$4 \mid 36$

$$\operatorname{mcm}(A) = \min \{ n \in \mathbb{N} : \underbrace{\forall a \in A}_{\text{tutti gli elementi}} \; \underbrace{a \mid n}_{n \text{ è multiplo di } a \in A} \}$$

ESEMPIO $A = \{3, 4, 6\}$

3 6 9 12 15, ... 24
4 8 12 16 20, ... 24
6 12 18 24 30, ...

$\min \{12, 24, 36 \dots\}$

$$\operatorname{MCD}(A) = \max \{ n \in \mathbb{N} : \underbrace{\forall a \in A \; n \mid a}\}$$

$A = \{3, 4, 6\}$

1, 3
1, 2, 4
1, 2, 3, 6

$\max \{1\} = 1$

$A = \{3, 6, 18\}$

1, 3
1, 2, 3, 6
1, 2, 3, 6, 9, 18

$\max \{1, 3\} = 3$

$$\mathbb{Q} = \{\text{numeri razionali}\} = \left\{ \frac{m}{n} : (m,n \in \mathbb{Z}) \wedge \underbrace{MCD\{m,n\} = 1} \right\}$$

$+ \ (-) \ \cdot \ (/)$

$p, q \in \mathbb{Q} \qquad p/q = p \cdot \frac{1}{q} = p \cdot \frac{n}{m}$

$q = \frac{m}{n}$

DEFINIZIONE POTENZA

Dato $a \in \mathbb{Q}$, $k \in \mathbb{Z}$ $\rightarrow$

$$a^k = \begin{cases} \overbrace{a \cdot a \cdots a}^{k \text{ volte}} & \text{se } k > 0 \\ 1 & k = 0 \\ \frac{1}{a \cdot a \cdots a} & \text{se } k < 0 \end{cases}$$

Vorremmo invertire quest'operazione $\sqrt[k]{a} = ?$

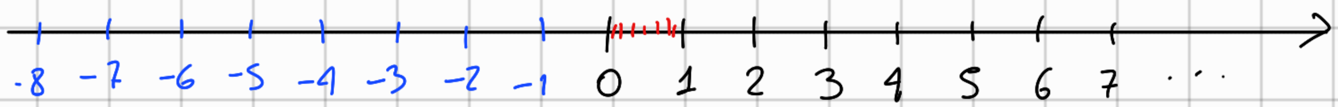
$$\sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt{2} = ? \leftarrow \nexists\, m, n \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } \left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$$

$MCD\{m,n\} = 1$

$2 \mid m$, $2 \mid n$ $\Rightarrow MCD\{m,n\} \neq 1$

Per questa ragione introduciamo i numeri REALI $\mathbb{R}$



$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

DEFINIZIONE [FUNZIONE] TRA INSIEMI

Dati due insiemi A, B detti RISPETTIVAMENTE DOMINIO e CODOMINIO e una legge f che a ogni elemento di A associa uno e uno solo degli elementi di B. La tripletta (A, B, f) si dice $\boxed{\text{FUNZIONE}}$

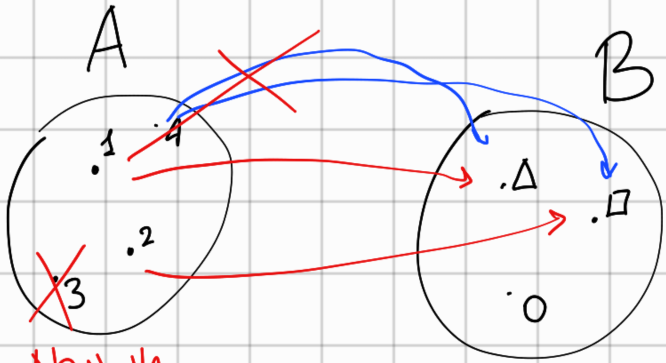
Si indica con

$$f : A \longrightarrow B$$
$$a \longmapsto f(a) = b \in B$$

"SI DICE CHE b è L'$\boxed{\text{IMMAGINE}}$ di a tramite f"

$A = \{1, 2\}$ $B = \{\Delta, o, \square\}$

$$f : A \longrightarrow B$$
$$1 \longmapsto \Delta$$
$$2 \longmapsto \square$$



NON VA BENE UN ELEMENTO "SENZA IMMAGINE"

ESEMPIO

$R = \{r : r \text{ è una regione italiana}\}$

$C = \{c : c \text{ è una } \underbrace{\text{città}}_{\text{(comune)}} \text{ italiana}\}$

$$f : C \longrightarrow R$$
$$\text{città} \longmapsto \text{regione}$$

① TUTTE LE CITTÀ SONO DENTRO UNA REGIONE? SÌ

② DENTRO UN'UNICA REGIONE? SÌ

f è UNA FUNZIONE

$f(\text{Cagliari}) = \text{Sardegna}$

$\text{Cagliari} \in C$, $\text{Sardegna} \in R$

$g: R \to C$ a ogni regione associa una città che ci sta dentro

DOMINIO CODOMINIO

$g(\text{Sardegna}) = ?$

(1) A OGNI REGIONE ASSOCIA ALMENO UNA CITTÀ SÌ

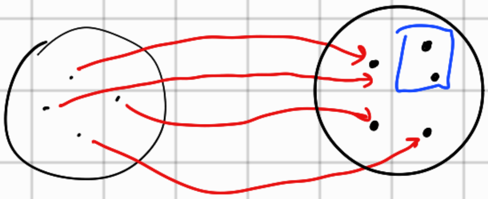
(2) UNA SOLA NO → Non è UNA FUNZIONE

g è la funzione che a ogni regione associa il suo capoluogo

$g(\text{Sardegna}) = \text{Cagliari}$

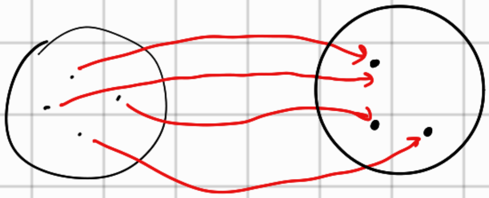
Definizione

$f: A \to B$ si dice $\boxed{\text{SURIETTIVA}}$



NO

$$\left[\forall b \in B \ \left(\exists a \in A : f(a) = b\right)\right]$$



SÌ

$$\Downarrow$$

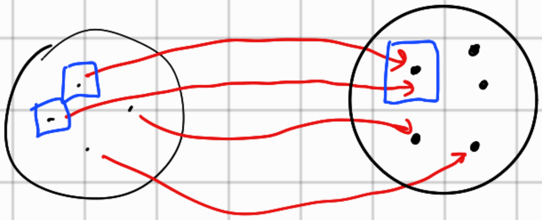
Cosa vuol dire che f è NON SURIETTIVA

$$\left[\exists b \in B : \left(\forall a \in A \ f(a) \neq b\right)\right]$$

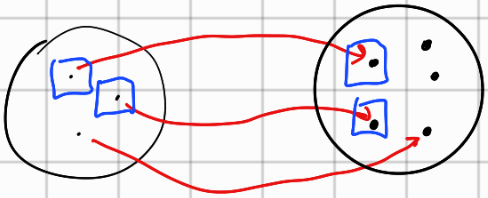
Definizione

f è INIETTIVA $\iff \forall a_1, a_2 \in A,\ a_1 \neq a_2 \implies f(a_1) \neq f(a_2)$

$\left(a_1 = a_2 \impliedby f(a_1) = f(a_2)\right)$



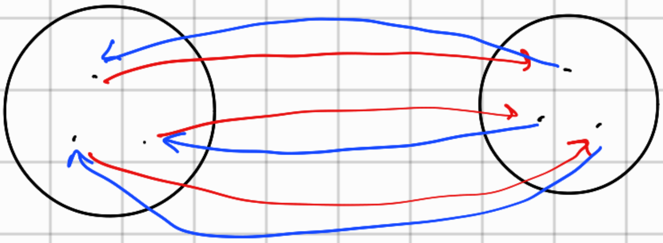
NON INIETTIVA



SÌ INIETTIVA

Definizione

Se $\underbrace{\quad}_{f:A\to B}$ è INIETTIVA e SURIETTIVA si dice BIETTIVA (ed è INVERTIBILE)



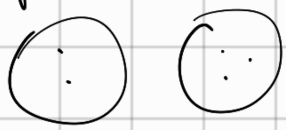
SCRIVEREMO CHE $f^{-1} : B \to A$ è $\boxed{\text{L'INVERSA}}$ di f

$f^{-1}(b)$ è quell'elemento (che esiste ed è unico per le due proprietà) tale che $f(a) = b$

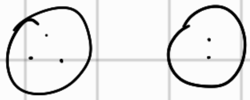
$$f^{-1}(f(a)) = a \quad \forall a \in A$$

$$f(f^{-1}(b)) = b \quad \forall b \in B$$

PROPRIETÀ 1 Se esiste $f: A \to B$ INIETTIVA $\Rightarrow \#A \leq \#B$



PROPRIETÀ 2 Se esiste $f: A \to B$ SURIETTIVA $\#B \leq \#A$



Da 1, 2 SEGUE CHE SE f BIETTIVA $\#A = \#B$

INSIEMI INFINITI

$$f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$n \longmapsto \begin{cases} \frac{n}{2} \geq 0 & \text{SE } n \text{ è PARI} \\ -\frac{n+1}{2} < 0 & \text{SE } n \text{ è DISPARI} \end{cases}$$

$f(4) = 2$

$f(7) = -\frac{7+1}{2} = -\frac{8}{2} = -4$ $\qquad f(0) = \frac{0}{2} = 0$

DOMANDA f è UNA FUNZIONE? • SI
: SÌ

È INIETTIVA? $n \neq m \Rightarrow f(n) \neq f(m)$

PRENDO $n, m \in \mathbb{N}$ SUPPONGO CHE $f(n) = f(m)$ $\left(\overset{\text{È VERO?}}{\Rightarrow} n = m \right)$

SE $f(n) = f(m)$ CASO 1 $f(n) = f(m) \geq 0$

$$\frac{n}{2} = \frac{m}{2} \geq 0$$

$$\boxed{n = m}$$

CASO 2 $f(n) = f(m) < 0$

$$-\frac{n+1}{2} = -\frac{m+1}{2}$$

$$-(n+1) = -(m+1)$$

$n+1 = m+1$

$\boxed{n = m}$

$\square$

f è SURIETTIVA? SÌ PER CASA

f è BIETTIVA $\Rightarrow$ $\#\mathbb{N} = \#\mathbb{Z} = \#\mathbb{Q} < \#\mathbb{R}$

NON LO DIMOSTRIAMO