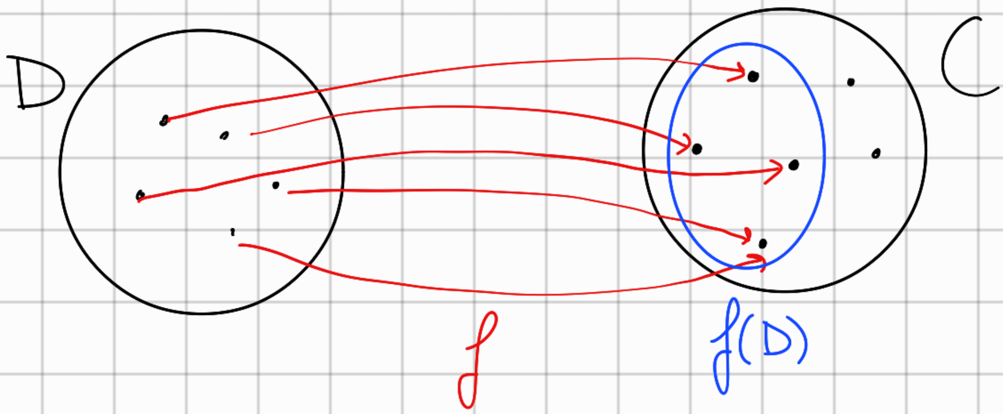
Lezione 7 16/10/24

Data $f: D \to C$ funzione

l'insieme immagine $f(D)$ è l'insieme di tutti i punti del codominio per i quali esiste un elemento del dominio che viene mandato in quel punto tramite f

$$f(D) = \{y \in C : \exists x \in D : f(x) = y\}$$



f è SURIETTIVA $\iff f(D) = C$

Se $f: D \to C$ è NON SURIETTIVA posso costruire una nuova funzione

$$f: D \to f(D)$$

che conserverà tutte le proprietà di f ma in aggiunta sarà suriettiva.

STUDIO DI FUNZIONE

(1) STUDIO DEL DOMINIO

Regola 1 NON SI DIVIDE PER 0

$$\frac{1}{\cdot} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$$
$$x \longmapsto \frac{1}{x}$$

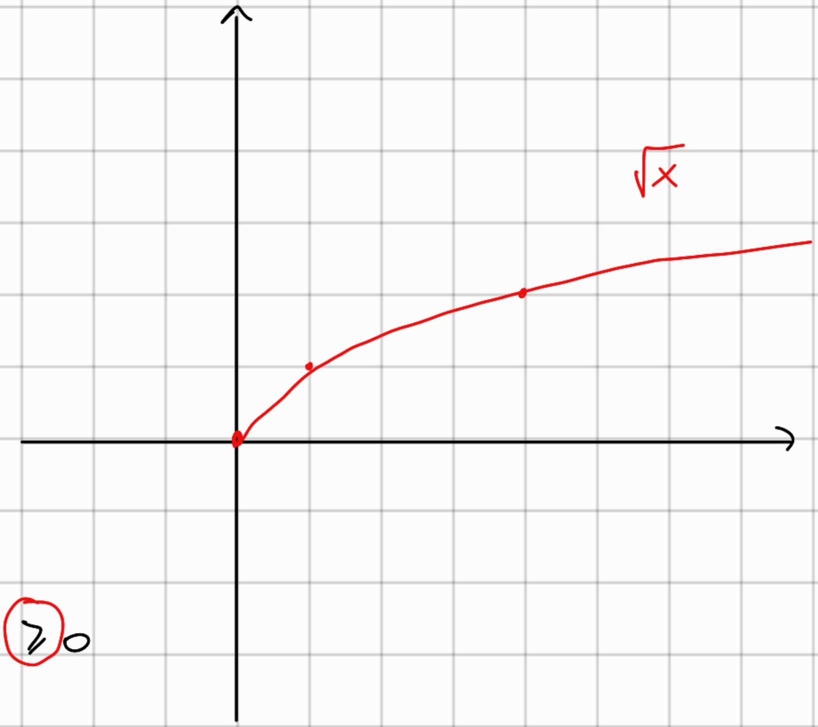
SIGNIFICA

$$f(x) = \frac{1}{3x-5} \Rightarrow \text{C.E. } 3x-5 \neq 0$$

$$f(x) = e^{\sin\left(\pi^2 - \frac{3}{x^2}\right)} \quad \text{C.E. } x^2 \neq 0$$

Regola 2.

$$\sqrt{\cdot} : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$$



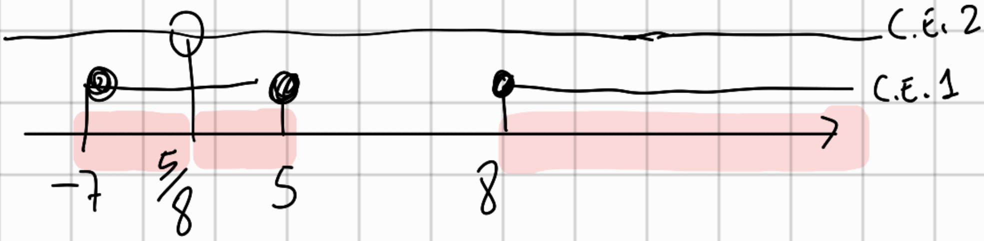
NON SI FA LA RADICE DI UN NUMERO NEGATIVO

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 9} \quad \text{C.E. } x^2 - 9 \geq 0$$

$$f(x)=\frac{\sqrt{g(x)+7}}{8x-5}$$

SUPPONIAMO CHE QUESTA CONDIZIONE CI DIA COME RISULTATO

$$\text{C.E.}\begin{cases} g(x)+7 \geq 0 & \longrightarrow \\ 8x-5 \neq 0 & \longrightarrow \end{cases} \quad \begin{cases} x \in [-7,5] \cup [8,+\infty) \\ x \neq \frac{5}{8} \end{cases}$$

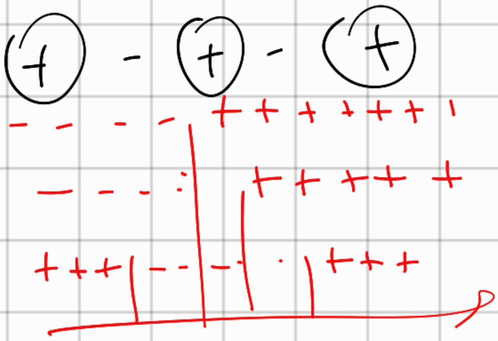


$$D=\left[-7,\frac{5}{8}\right)\cup\left(\frac{5}{8},5\right]\cup[8,+\infty)$$

⚠ È DIVERSO DAL PROCEDIMENTO PER LA RISOLUZIONE DELLE DISEQUAZIONI FRATTE VISTO IERI

$$\frac{f(x)\,g(x)}{h(x)}<0$$

$f(x)\geq 0$ | $g(x)\geq 0$ | $h(x)>0$



ESEMPIO INGANNEVOLE

$$f(x) = \frac{\left(\sqrt{\pi+2}\right)x}{3e^2} = mx \qquad m = \frac{\sqrt{\pi+2}}{3e^2}$$

È UNA RETTA

ESEMPIO

• $\sqrt{\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-5}}$ C.E. $\begin{cases} ① \; x^2-5 \neq 0 \\ ② \; \dfrac{x^2-2x+1}{x^2-5} \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty, -\sqrt{5}) \cup (-\sqrt{5}, \sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}, +\infty) \\ \mathbb{R} - \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\} \end{cases}$

① $x^2 - 5 \neq 0$

$x^2 \neq 5$

$x \neq \pm\sqrt{5}$

$\downarrow$

$S_1 = (-\infty, -\sqrt{5}) \cup (-\sqrt{5}, \sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}, +\infty)$

---

② $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-5} \geq 0$

$x^2 - 2x + 1 \geq 0$

$\Delta = 0$

$(x-1)^2 \geq 0$

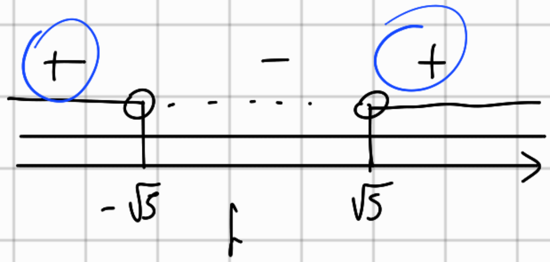
$\mathbb{R}$

$x^2 - 5 > 0$

$x_{12} = \pm\sqrt{5}$

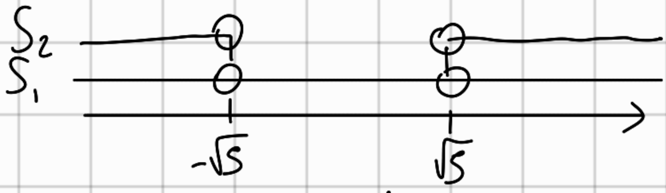
$x < -\sqrt{5} \vee x > \sqrt{5}$

$(-\infty, -\sqrt{5}) \cup (-\sqrt{5}, +\infty)$



$S_2 = (-\infty, -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}, +\infty)$

$$D = S_1 \cap S_2$$



Prendo tutti i punti in cui ho tutte e due le linee

$$D = (-\infty, -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}, +\infty)$$

SE f FUNZIONE INVERTIBILE $\quad f: A \to B \qquad g: C \longrightarrow D$

$$f \circ f^{-1} = id_B \qquad\qquad B \subseteq C \ \left(\text{BASTA CHE } f(A) \subseteq C\right)$$

$$f^{-1} \circ f = id_A$$

DUE FUNZIONI f, g SONO UGUALI $\Leftrightarrow$ SONO UGUALI DOM, COD, LEGGE

$\downarrow$

$\forall x \in DOM$

$f(x) = g(x)$

$$f \circ f^{-1}: \quad B \xrightarrow{f^{-1}} A \xrightarrow{f} B$$

$$b \longmapsto f^{-1}(b) \longmapsto f(f^{-1}(b))$$

$$id_B: B \longrightarrow B$$

$$b \longmapsto b$$

SONO UGUALI ?

Sia $b \in B \qquad id_B(b) = b$

$$[f \circ f^{-1}](b) = f(f^{-1}(b)) = f(a) = b$$

SONO UGUALI

PER DEF. DI INVERSA $\quad f^{-1}(b) = a : f(a) = b$

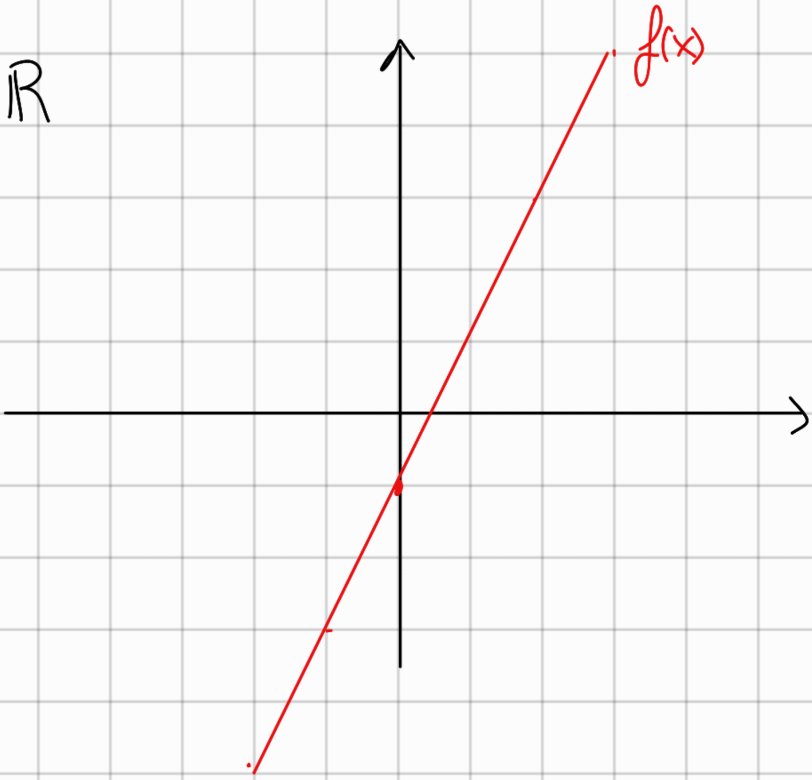
PER CASA L'ALTRA

$\square$

NOTA: NON È IN GENERALE VERO $\left[f \circ g = g \circ f \right]$

→ LA COMPOSIZIONE NON È COMMUTATIVA

$f(x) = 2x - 1 \quad : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



$y = 2x - 1$

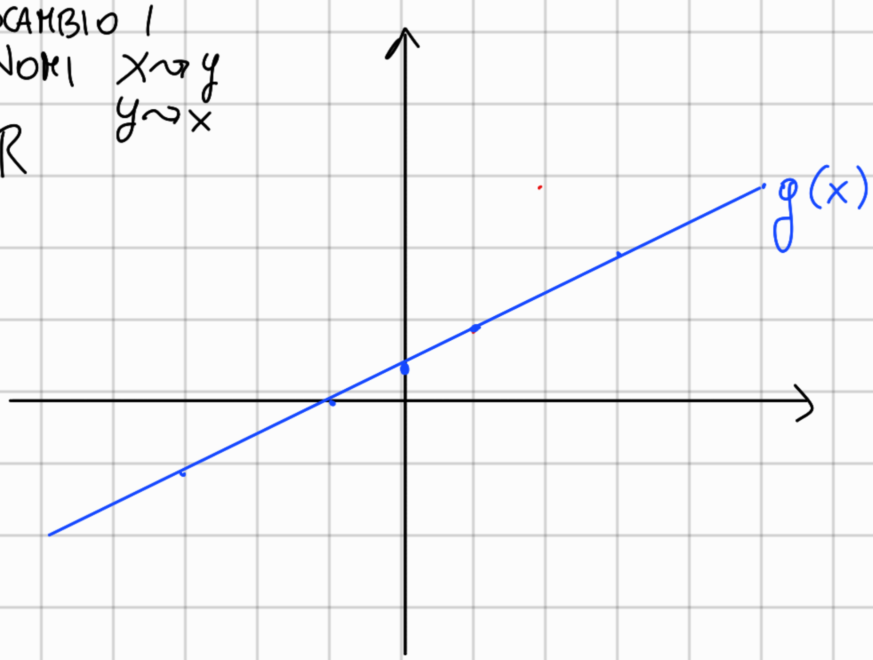
$y + 1 = 2x$

$\frac{y+1}{2} = x$

$f^{-1}(y) = \frac{y+1}{2} = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$

SCAMBIO I NOMI $x \rightsquigarrow y$, $y \rightsquigarrow x$

$\boxed{g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}} \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



$g(f(x)) = x$

$f(g(x)) = x$

$$g(f(x)) = g(2x-1) = \frac{1}{2}(2x-1) + \frac{1}{2} = \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}x - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} = x$$

$g \circ f = id_{\mathbb{R}}$