Lezione 8 18/10/24

DEFINIZIONE [SOMMATORIA]

ESEMPIO $2+13+45 = a_1+a_2+a_3 = \sum_{i=1}^{3} a_i$

$$2 \to a_1 \quad 13 \to a_2 \quad 45 \to a_3$$

IN GENERALE $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

$n \geq m$

OSSERVAZIONE $\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \dots + a_n$

OSSERVAZIONE $\boxed{\sum_{i=3}^{2} a_i = 0}$

A PAG 125 del LIBRO CI SONO PROPRIETÀ

$c \in \mathbb{R}$ $\quad \underbrace{ca_1}+c\cdot a_2+c\cdot a_3 = c\,(a_1+a_2+a_3)$

i. $\sum_{i=1}^{3} (ca_i) = c \sum_{i=1}^{3} a_i$

$k-m=j$

ii.
iii.] LIBRO

iv. $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1+m}^{n+m} a_{k-m}$

$a_1+a_2+\dots+a_n \quad \underline{a_{1\cancel{+m}\cancel{-m}} + a_{2+m-m} \dots + a_{n\cancel{+m}\cancel{-m}}}$

$$8(2^0+2^1+2^2+2^3+2^4)$$
$$8(1+2+4+8+16)$$
$$8+16+32+64+128$$
$$\sum_{i=3}^{7} 2^i \qquad 2^3+2^4+2^5+2^6+2^7$$

$$\parallel$$

$$\sum_{i=3}^{7} 8\cdot 2^{i-3} = 8\sum_{i=3-3}^{7-3} 2^{i-3+3} = 8\sum_{i=0}^{4} 2^i$$

iv.
con $m=-3$

POLINOMI

Un polinomio di grado n, dati $a_0, a_1, \cdots a_n$ è una funzione

$a_n \neq 0$

$$P: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0x^0+a_1x^1+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$$
$$a_0 + a_1x + a_2 + \cdots + a_nx^n$$

OSSERVAZIONE. $c: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto c$ COSTANTE È UN POLINOMIO DI GRADO 0

OSSERVAZIONE. LE RETTE SONO POLINOMI DI GRADO 1 $f(x) = \underset{a_1}{m}x + \underset{a_0}{q}$, $m \neq 0$

OSSERVAZIONE. LE PARABOLE ax^2+bx+c SONO POLINOMI DI GRADO 2

DEFINIZIONE: Dato P POLINOMIO

$x_0 \in \mathbb{R}$ è UNA $\boxed{\text{RADICE}}$ (o SOLUZIONE) di $P(x) \iff$

DI GRADO n

$$P(x_0) = 0$$

SE $x_0 \in \mathbb{R}$ È RADICE DI $P(x)$ ALLORA ESISTE $Q(x)$ POLINOMIO DI GRADO $= n-1$ TALE CHE

$$P(x) = (x-x_0)\,Q(x)$$

$$P(x_0) = 0 \qquad (x_0-x_0)\,Q(x_0) = 0$$

SE $Q(x_0) = 0 \Rightarrow$ LA RADICE È MULTIPLA

$$P(x) = (x-x_0)\,\underbrace{Q_1(x)} = (x-x_0)(x-x_0)Q_2(x)$$

$$= (x-x_0)^2\,\underbrace{Q_2(x)}$$

$n-2$

$\vdots$

$$(x-x_0)^3\,Q_3(x)$$

$$\boxed{P(x) = (x-x_0)^k\,Q(x) \qquad \text{NUOVO } Q(x_0) \neq 0}$$

K è DETTA MOLTEPLICITÀ DELLA RADICE x_0

IN GENERALE SE n è IL GRADO DI P ALLORA P AVRÀ AL MASSIMO n radici

$P(x)$ $\quad x^4-3x^3+2x^2+x-1 \geq 0$ $\quad$ VOGLIO SCOMPORLO $(x-1)\,Q(x)$

VERIFICHIAMO CHE $x=1$ è UNA RADICE CON LA DIVISIONE TRA POLINOMI

$$
\begin{array}{l|l}
x^4-3x^3+2x^2+x-1 & x-1 \\ \hline
-x^4+x^3 & x^3-2x^2+1 = P_1(x) \\
\hline
/\ \ -2x^3+2x^2 & \\
\quad +2x^3-2x^2 & \\
\hline
/\ \ /\ \ x-1 & \\
\qquad x-1 & \\
\hline
\qquad /\ \ / &
\end{array}
$$

$\dfrac{x^4}{x}=x^3$

$\dfrac{-2x^3}{x}=-2x^2$

RICORDO DIVISIONE COL RESTO

$357:2$

$$
\begin{array}{l|l}
357 & 2 \\ \hline
-2 & 178 \\
\;\;15 & \\
-14 & \\
\;\;\;17 & \\
\;\;\;16 & \\
\;\;\;\;\;1 &
\end{array}
$$

$\boxed{357 = 178 \cdot 2 + 1}$

RESTO

SE 1 È UNA RADICE $\Rightarrow$ RESTO

$$P(x) = (x-1)P_1(x) = (x-1)^2(x^2-x-1)$$

$$x^3-2x^2+1$$

$$1 \quad -2 \quad +1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 \text{ è RADICE DI } P_1(x)$$

$$
\begin{array}{l|l}
x^3-2x^2+0+1 & x-1 \\ \hline
-x^3+x^2 & x^2-x-1 \\
\hline
/\ \ -x^2 & \\
\quad x^2-x & \\
\hline
/\ \ -x+1 &
\end{array}
$$

$(x-1)(x^2-x-1)$

$x^3-x^2\cancel{-x}-x^2\cancel{+x}+1$

x^3-2x^2+1

POSSO RISCRIVERE IL MIO PROBLEMA INIZIALE

$$\underbrace{(x-1)^2}(x^2-x-1) \geq 0$$

$(x-1)^2 \geq 0$ | $x^2-x-1 \geq 0$

$\mathbb{R}$

PROSEGUIRE PER ESERCIZIO

COME SI VERIFICA CHE -1 È UNA RADICE?

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 \overset{?}{=} 0$$

PARI

$(-1)^4 = 1$

$(-1)^3 = -1$

- SOMMO I COEFFICIENTI DI GRADO PARI
- SOMMO I COEFFICIENTI DI GRADO DISPARI

$\boxed{\text{SONO UGUALI?}}$ → SÌ → -1 È RADICE (POSSO DIVIDERE PER $(x+1)$)

→ NO → -1 NON È RADICE

POSSO TROVARE LE RADICI RAZIONALI CIOÈ CHE APPARTENGONO A $\mathbb{Q}$ TRA GLI ELEMENTI DI QUESTA FORMA

$\pm \frac{m}{k}$ DOVE m È UN DIVISORE DI a_0

k È DIVISORE DI a_n

a_n ↓ a_0 ↓

$$3x^3 - 8x^2 + 3x + 2$$

(1) $3 \quad -8 \quad +3 \quad +2 = 0$

(-1) $3 \quad -8 \quad +3 \quad +2$

$-6 \neq 6$ ← -1 NON È RADICE

k \ m	1	2
1	± 1	± 2
3	$\pm \frac{1}{3}$	$\pm \frac{2}{3}$

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & 3 & -8 & +3 & 2 \\
1 & & 3 & -5 & -2 \\
\hline
 & 3 & -5 & -2 & /
\end{array}
$$

METODO DI RUFFINI

$$(3x^2-5x-2)(x-1)$$

$$\downarrow$$

$$-\frac{1}{3},\ 2$$

- RISOLVERE LA SEGUENTE DISEQUAZIONE

$$\frac{9x^3+15x^2-8x-4}{x+7} \leq 0$$

QUANDO UN POLINOMIO HA SOLO POTENZE PARI SI PUÒ SEMPLIFICARE IL PROBLEMA IN QUESTO MODO.

$$x^4+2x^2-15=0$$

$$\downarrow$$

$$t^2+2t-15=0$$

$$t=x^2$$
$$t^2=x^4$$

$$\Delta=4+60=64$$

$$t_{12}=\frac{-2\pm 8}{2} \quad t_1=-5 \quad t_2=3$$

$$t=-5 \quad \vee \quad t=3$$

$$x^2=-5 \quad \vee \quad x^2=3$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\varnothing \qquad x=\pm\sqrt{3}$$

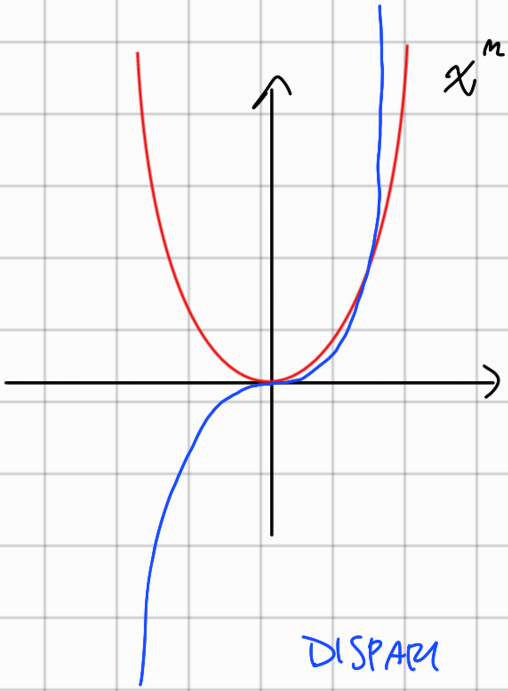
$$x=-\sqrt{3} \quad \vee \quad x=\sqrt{3}$$

$$S=\{-\sqrt{3},+\sqrt{3}\}$$

EQUAZIONI IRRAZIONALI

$$\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$$

DATE $f(x)$, $g(x)$ FUNZIONI



CASO SEMPLICE n è DISPARI

$$\rightarrow \quad f(x) = (g(x))^n$$

CASO DIFFICILE n è PARI

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) = (g(x))^n \end{cases}$$