Lezione 9

21/10/24

$$f(x) = x^n$$

ESPONENTE (n)

BASE (x)

FUNZIONE POTENZA

$x \in \mathbb{R}$

SE $n \in \mathbb{N}$ definisco $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ volte}}$

PROPRIETÀ

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
2. $a^n b^n = (ab)^n$
3. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

$m, n \in \mathbb{N}$

$a, b \in \mathbb{R}$

$a^0 = 1$

ESTENDO AI NUMERI INTERI $\mathbb{Z}$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \in \mathbb{Q}$$

CON QUESTE DEFINIZIONI CONTINUANO A VALERE LE PROPRIETÀ

ESTENDO AI NUMERI RAZIONALI $\mathbb{Q}$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$2^{\frac{3}{3}} = 2^1 = 2$$

ESEMPIO: Calcola

$$\frac{\sqrt[3]{8}}{27}(2+1)^2 = \frac{\cancel{\sqrt[3]{2^3}}}{\cancel{3^3}}(3)^{\cancel{4}} = 2 \cdot 3 = 6$$

$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$

$27 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3$

ESEMPIO

$$x^{\frac{3}{2}} + 2 \geq 0$$

$$\underbrace{\sqrt[2]{x^3}} + \underbrace{2} \geq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

C.E. $x^3 \geq 0$

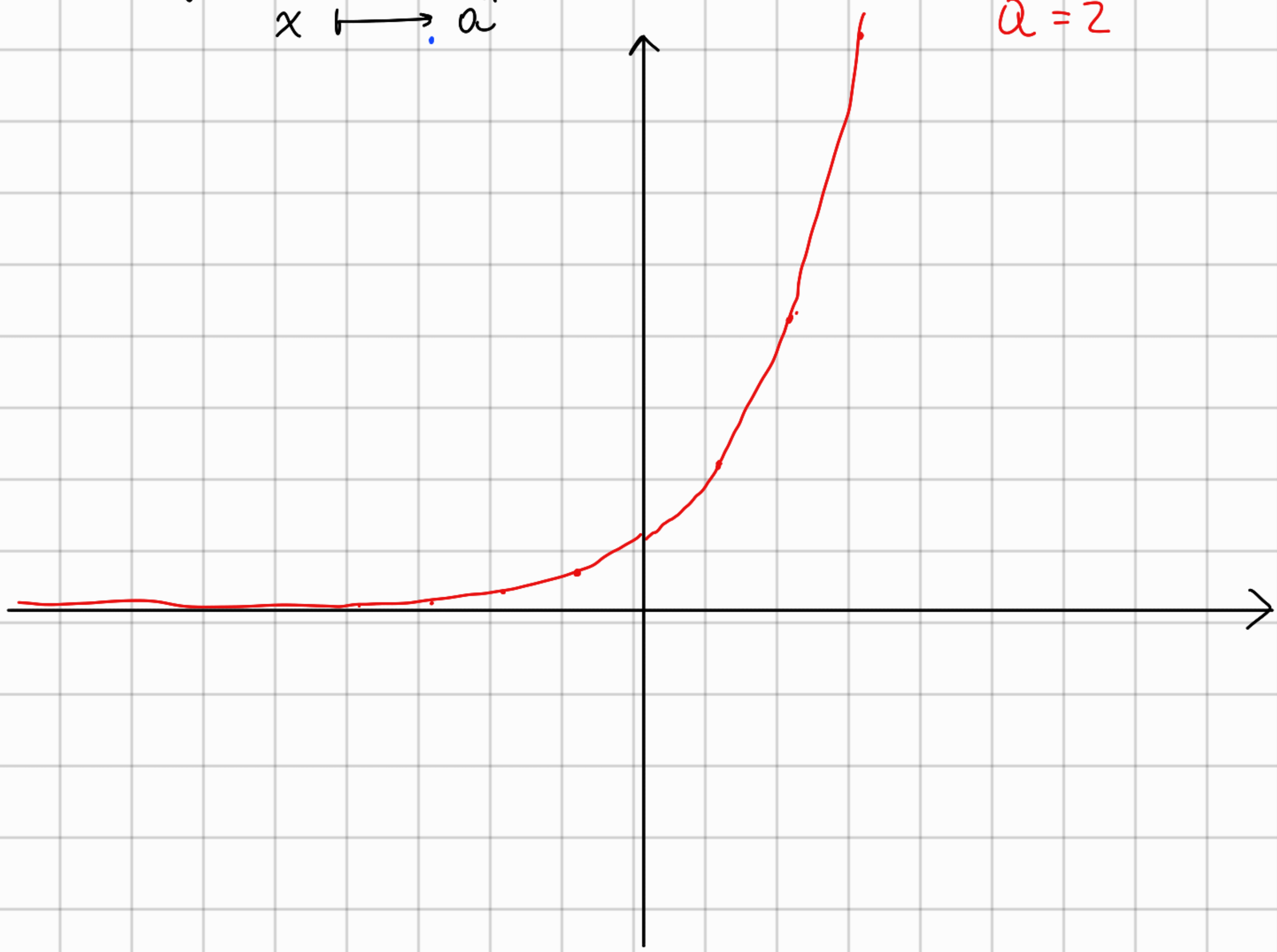
$x \geq 0$

$$S = [0, +\infty)$$

FUNZIONE ESPONENZIALE

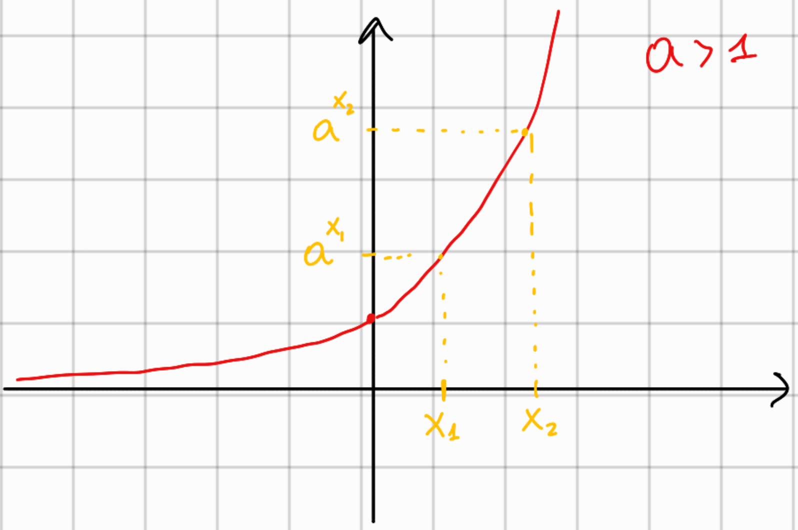
Sia $a \in (0, +\infty)$ (cioè $a > 0$)

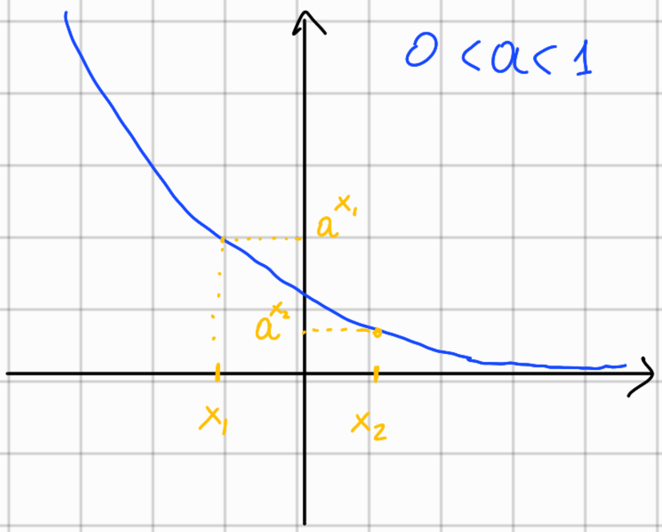
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty)$$
$$x \longmapsto a^x$$



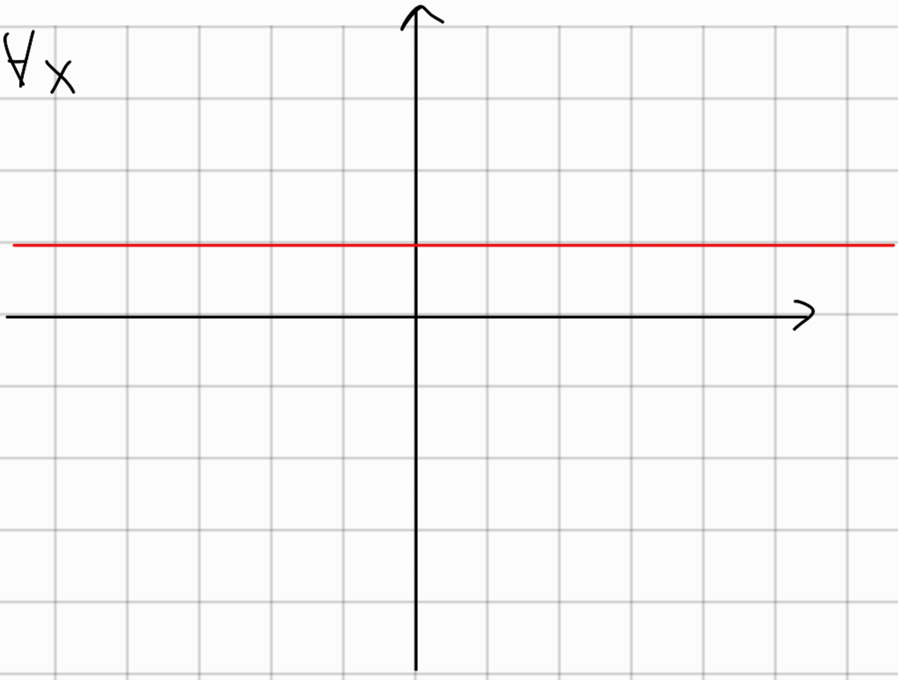
SE $a > 1$ $\Rightarrow$ LA FUNZIONE AVRÀ UN ANDAMENTO CRESCENTE

SE $a < 1$ $\Rightarrow$ LA FUNZIONE AVRÀ UN ANDAMENTO DECRESCENTE





$a = 1 \qquad 1^x = 1 \quad \forall x$



PROPRIETÀ

I $\quad a^x = 0$ NON HA SOLUZIONI

II $\quad a^x > 0$ SEMPRE $\quad$ ($a < 0$ MAI)

III $\quad$ LA FUNZIONE È MONOTÒNA
- CRESCENTE $\quad \underline{a > 1}$
- DECRESCENTE $\quad \underline{a < 1}$

ALLORA

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} a^{x_1} < a^{x_2} & \underline{a > 1} \\ a^{x_1} > a^{x_2} & \underline{0 < a < 1} \end{cases}$$

IV $\quad a^x = 1 \iff x = 0$

V $\quad a^x$ È INIETTIVA

VI $\quad a^x$ È SURIETTIVA

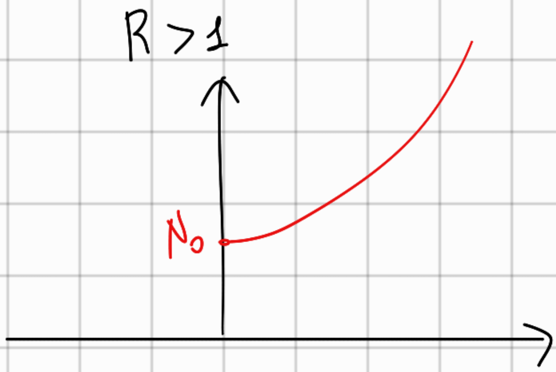
CONSIDERIAMO UNA POPOLAZIONE

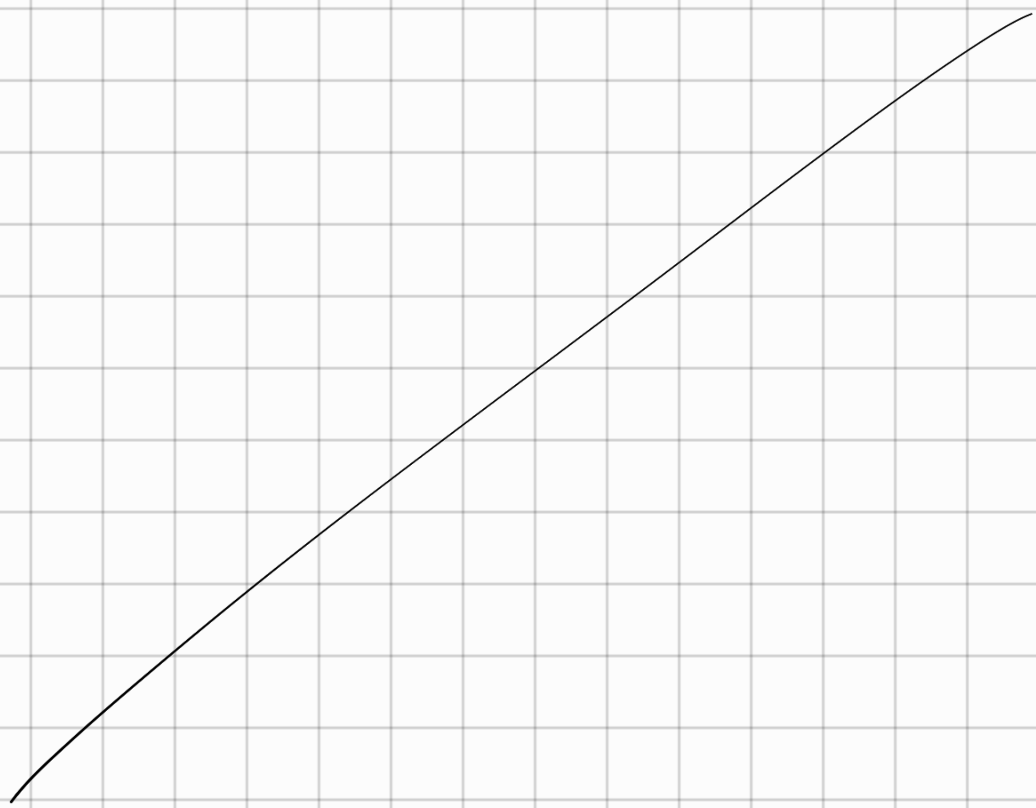
$$N(t) = R^t N_0$$

NUMERO DI INDIVIDUI ALL'ISTANTE t

DOVE N_0 È IL NUMERO DI INDIVIDUI ALL'ISTANTE $t=0$ (ALL'INIZIO ESPERIMENTO)

R COSTANTE





FUNZIONE LOGARITMICA

Poiché la funzione esponenziale è biiettiva posso considerare la sue funzione inversa.

DATO $a>0$, $a\neq 1$ definisco $\log_a : (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \log_a x$$

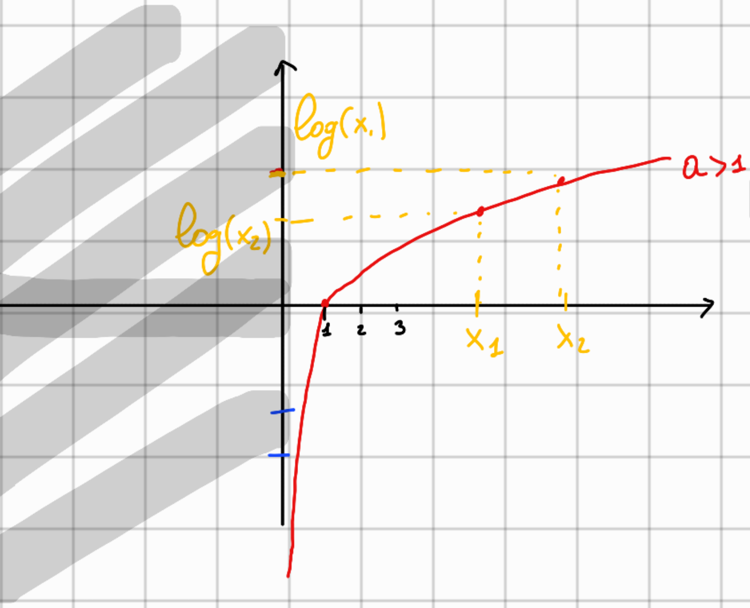
$\boxed{\text{LOGARITMO IN BASE } a}$

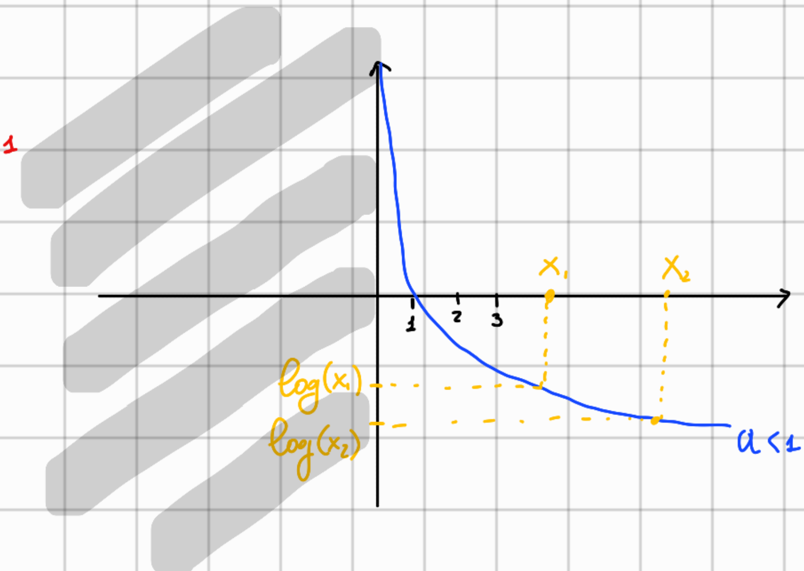
È QUEL NUMERO CHE DEVO METTERE COME ESPONENTE DI a PER OTTENERE x

$$\log_a(x) = y \iff a^y = x$$

ESEMPIO $\log_2 8 = 3$

$$2^3 = 8$$





$a^0 = 1 \Rightarrow \log_a(1) = 0$

ESEMPIO

$\log_{10}(1) = 0$

$\log_{10}(10) = 1 \leftarrow$ $\qquad \log_a(a) = 1$

$\log_{10}(100) = 2$

ESEMPIO SCALA RICHTER

ESEMPIO $pH = -\log_{10}([H^+])$

CONCENTRAZIONE

SE $[H^+] = 10^{-3} \rightarrow pH = -\log_{10}(10^{-3})$

$= -(-3) = 3$

$\boxed{\text{Regola } 3}$ $\log(f(x))$

$$\downarrow$$

C.E. $f(x) > 0$

PROPRIETÀ

$\log(-7)$ = NON HA SENSO

I $\log_a(0)$ NON LO POSSO FARE

II $\log_a(x)$ SI PUÒ FARE SOLO SE $x > 0$

III $x_1 < x_2$

$\log_a(x_1) < \log_a(x_2)$ $\quad a > 1$

$\log_a(x_1) > \log_a(x_2)$ $\quad 0 < a < 1$

V $\log$ è INIETTIVA

VI $\log$ è SURIETTIVA

ESEMPIO

$5^x = 25$ $\quad x = 2$

$x = \log_5(25) = 2$

$5^x = 7$ $\quad x = \log_5(7)$

$$5^1 < 7 < 25 = 5^2$$

POSSO FARLO PERCHÉ $5 > 1$

$$1 = \log_5(5) < \log_5(7) < \log_5(25) = 2$$

PROPRIETÀ DEI LOGARITMI

- $\log_a(1) = 0$
- $\log_a(a) = 1$

LOGARITMO DEL PRODOTTO

1. $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y) \rightarrow \left(\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)\right)$

LOGARITMO DI UNA POTENZA

2. $\log_a(x^t) = t \cdot \log_a(x)$

CAMBIAMENTO DI BASE

3. $\log_a(x) = \dfrac{\log_c(x)}{\log_c(a)}$ $\quad \forall c > 0,\ c \neq 1, a$

NOTAZIONE

$$\log_{10}(x) = \mathrm{Log}(10)$$

$$\log_e(x) = \log(x) = \ln(x)$$

$e = 2.7\dots$ NUMERO DI NEPERO (O DI EULERO)