Lezione 13 4/11/24

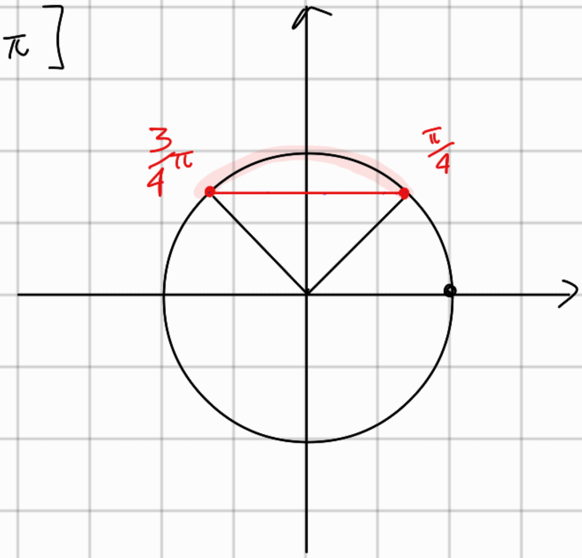
DISEQUAZIONI TRIGONOMETRICHE

Studio per $x \in [-\pi, \pi]$

$$\sin(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\downarrow$$

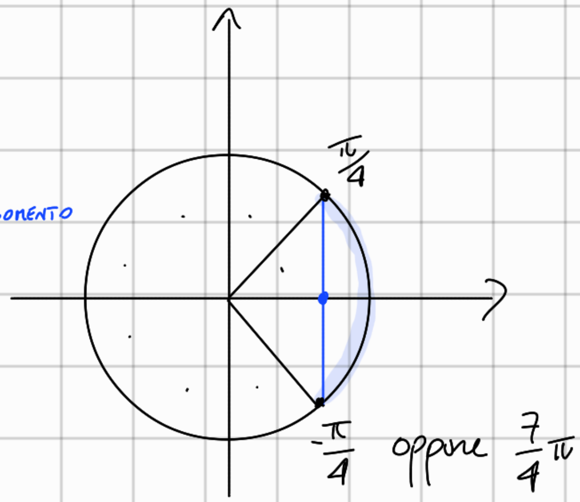
$$\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}\pi$$



$$x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right] \subseteq [-\pi, \pi]$$

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad x \in [-\pi, \pi]$$

DEVO METTERE LA PERIODICITÀ QUANDO HO NELL'ARGOMENTO UNA $f(x)$.



$$-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \boxed{+2k\pi} \leq 2x + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4} \boxed{+2k\pi} - \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2} \leq \frac{2x}{2} \leq \frac{2k\pi}{2}$$

$$\downarrow$$

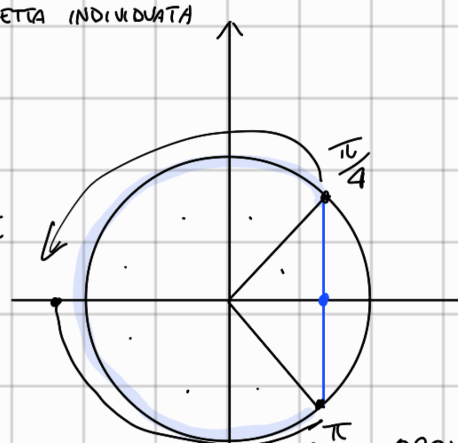
$$\boxed{-\frac{\pi}{4} + k\pi \leq x \leq k\pi}$$

QUESTE SONO TUTTE LE SOLUZIONI
VERIFICO PER QUALI $k \in \mathbb{Z}$ CADONO NELL'INTERVALLO $[-\pi, \pi]$

SE AVESSI IL $\leq$ DOVREI SCRIVERE I PUNTI CHE STANNO A SINISTRA DELLA RETTA INDIVIDUATA

$$\cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

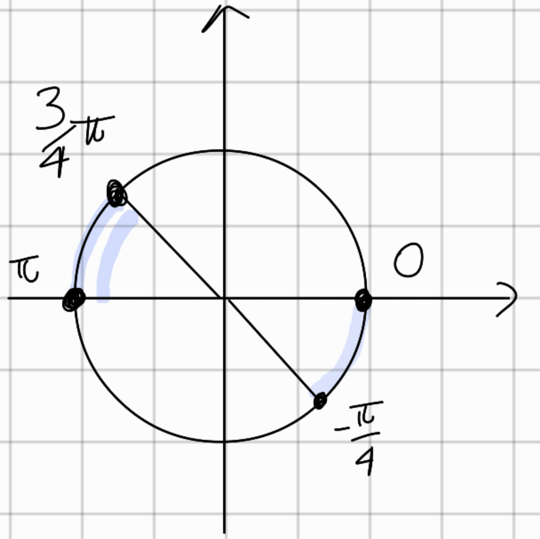
$$-\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{4} \vee \frac{\pi}{4} \leq x \leq \pi$$



$k=0$ $\quad \boxed{-\frac{\pi}{4} \le x \le 0}$

$k=1$ $\quad -\frac{\pi}{4}+\pi \le x \le \pi$

$$\boxed{\frac{3}{4}\pi \le x \le \pi}$$



$$S = \left[-\frac{\pi}{4}, 0\right] \cup \left[\frac{3}{4}\pi, \pi\right]$$

Verifica che con $k=2$ $\quad k=-1$ eccede $\quad x \notin [-\pi,\pi]$

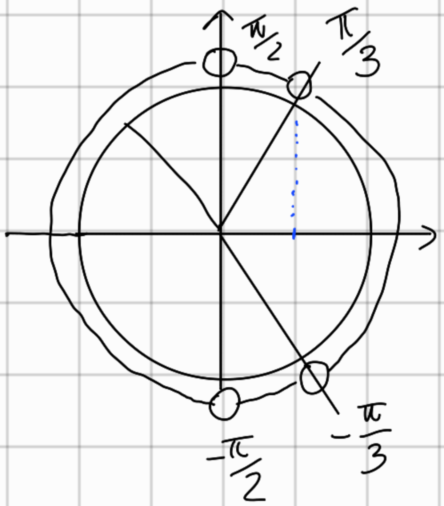
Trovare il dominio di $\quad f(x) = \sqrt{\dfrac{\sin 2x}{2\cos^2 x - \cos x}}$

$x \in [-\pi, \pi]$

C.E. $\begin{cases} \dfrac{\sin(2x)}{2\cos^2 x - \cos x} \ge 0 \\ 2\cos^2 x - \cos x \ne 0 \end{cases}$

VOLENDO E' UTILE CHIAMARE

$\cos x = t$



$2\cos^2 x - \cos x \ne 0$

$(2\cos x - 1)\cos x \ne 0$

$\Leftrightarrow$

$2\cos x - 1 \ne 0 \quad \wedge \quad \cos x \ne 0$

$\downarrow$

$x \ne \frac{\pi}{2} \wedge x \ne -\frac{\pi}{2}$

$\cos x \neq \frac{1}{2}$

$\downarrow$

$x \neq -\frac{\pi}{3} \wedge x \neq \frac{\pi}{3}$

$S_1 = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{\pi}{3} \right\}$

$$\frac{\sin 2x}{2\cos^2 x - \cos x} \geq 0$$

$\sin 2x = \sin(x + x) = \sin x \cos x + \cos x \sin x$

$= 2 \sin x \cos x$

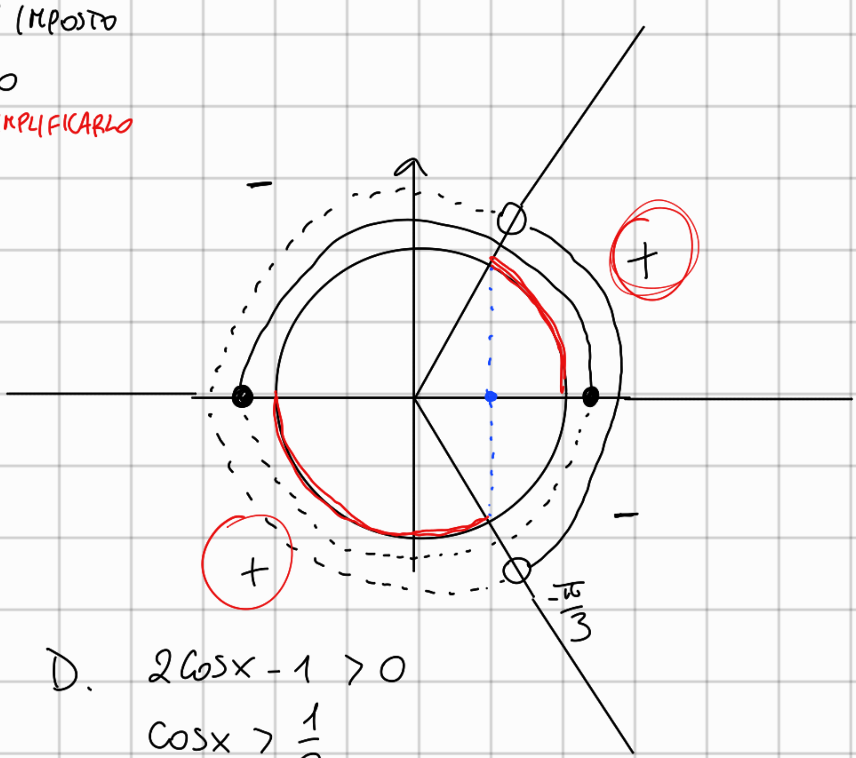
$$\frac{2\sin x \cancel{\cos x}}{(2\cos x - 1)\cancel{\cos x}} \geq 0$$

Ho GIA' IMPOSTO

$\cos x \neq 0$

POSSO SEMPLIFICARLO

$$\frac{2\sin x}{2\cos x - 1} \geq 0$$



N. $2\sin x \geq 0$

$\sin x \geq 0$

$0 + 2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi$

$k=0$

$\boxed{0 \leq x \leq \pi}$

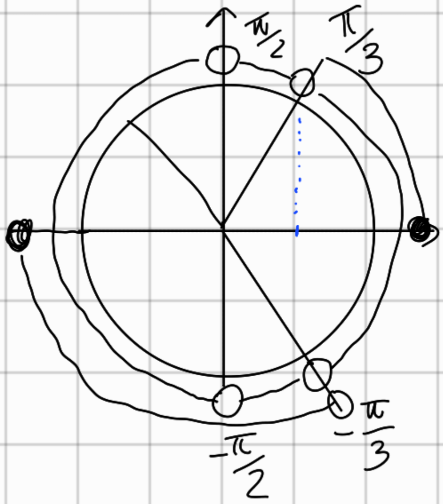
D. $2\cos x - 1 > 0$

$\cos x > \frac{1}{2}$

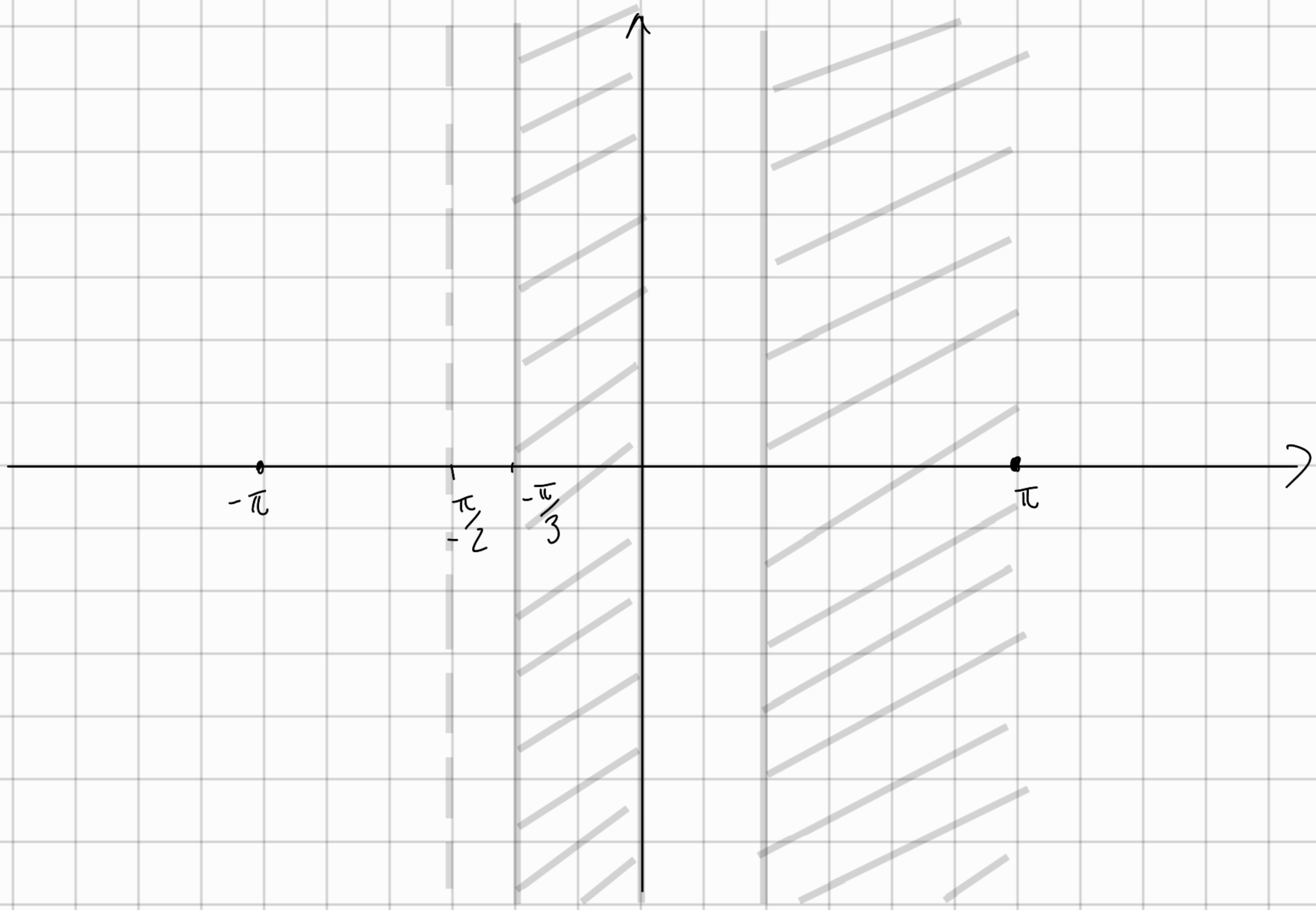
$-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$

$-\pi \leq x < -\frac{\pi}{3} \vee 0 \leq x < \frac{\pi}{3}$

$S_2 = \left[-\pi, -\frac{\pi}{3}\right) \cup \left[0, \frac{\pi}{3}\right)$



$$D = S_1 \cap S_2 = \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}\right) \cup \left[0, \frac{\pi}{3}\right)$$



STUDIO DI FUNZIONE

- DOMINIO
  1. $\frac{1}{f(x)} \rightarrow f(x) \neq 0$
  2. $\sqrt{f(x)} \rightarrow f(x) \geq 0$
  3. $\log(f(x)) \rightarrow f(x) > 0$
  4. $tg(f(x)) \rightarrow f(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$
  5. $\begin{cases} \arcsin(f(x)) \\ \arccos(f(x)) \end{cases} \rightarrow -1 \leq f(x) \leq 1$

- SEGNO E INTERSEZIONE ASSI

$f(x) \quad , D$

Se $0 \in D$ INTERSEZIONE ASSE y $A(0, f(0))$

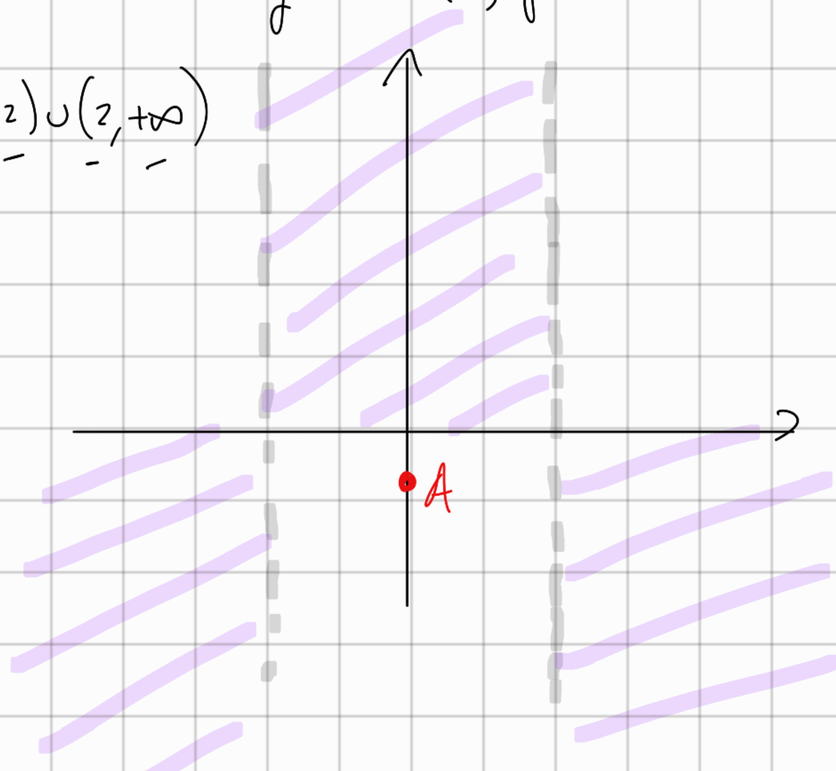
ESEMPIO

$$D = [-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$$

$$f(x) = \frac{x^2+3}{x^2-4}$$

$$f(0) = \frac{0+3}{0-4} = -\frac{3}{4}$$

$$A = \left(0, -\frac{3}{4}\right)$$



STUDIO DEL SEGNO E INTERSEZIONE ASSE X

$f(x) \geq 0$ $\qquad\qquad$ $f(x) = 0$

$$\frac{x^2+3}{x^2-4} \geq 0$$

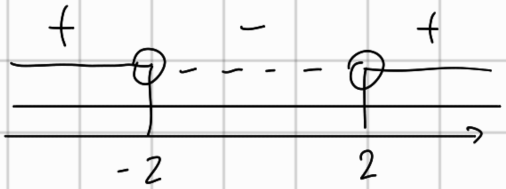
$x^2+3 \geq 0$

$\mathbb{R}$

$x^2-4 > 0$

$x_{12} = \pm 2$

$x < -2 \vee x > 2$



- f è POSITIVA $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
- f è NEGATIVA $x \in (-2, 2)$
- f è <u>NULLA</u> MAI

LIMITI AGLI ESTREMI DEL DOMINIO

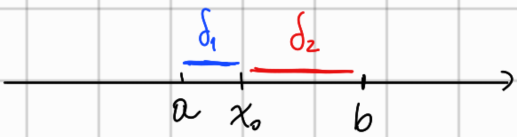
Lo scopo è quello di capire come è la funzione vicino agli estremi del dominio. (MA SI POSSONO CALCOLARE IN QUALSIASI PUNTO)

DEFINIZIONE:

Dato $x_0 \in \mathbb{R}$ un $\boxed{\text{INTORNO COMPLETO}}$ di x_0 è un intervallo aperto (a,b) che contiene x_0. (Cioè per cui $a < x_0 < b$)

$$\delta_1 = x_0 - a \rightarrow a = x_0 - \delta_1$$
$$\delta_2 = b - x_0 \rightarrow b = x_0 + \delta_1$$

$$I(x_0) = (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_2) \quad \text{dove } \delta_1, \delta_2 > 0$$



ESEMPIO $\quad x_0 = 1 \qquad I = (-1, 3)$ è un intorno di 1

$I = (0.99999, 1.000001)$ "

Se $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ si dice che $\underline{I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)}$

si dice $\boxed{\text{INTORNO CIRCOLARE}}$.

$$I_\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : \underline{|x - x_0| < \delta}\}$$

$x - x_0$

Definizione

Chiameremo $\boxed{\text{INTORNO DESTRO}}$ di x_0 $\quad I^+_\delta(x_0) = (x_0, x_0+\delta)$

$\boxed{\text{INTORNO SINISTRO}}$ di x_0 $\quad I^-_\delta(x_0) = (x_0-\delta, x_0)$

Chiameremo un qualsiasi intervallo $(a, +\infty), a \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{INTORNO DI } +\infty}$

un qualsiasi intervallo $(-\infty, a)$ $a \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{INTORNO DI } -\infty}$

Definizione

$\bar{D}$ = CHIUSURA DI D

Sia $D \subseteq \mathbb{R}$ $\quad f: D \to \mathbb{R}$

se $D = (x_1, x_2)$

Sia $x_0 \in \bar{D}$ si dice

$\bar{D} = [x_1, x_2]$

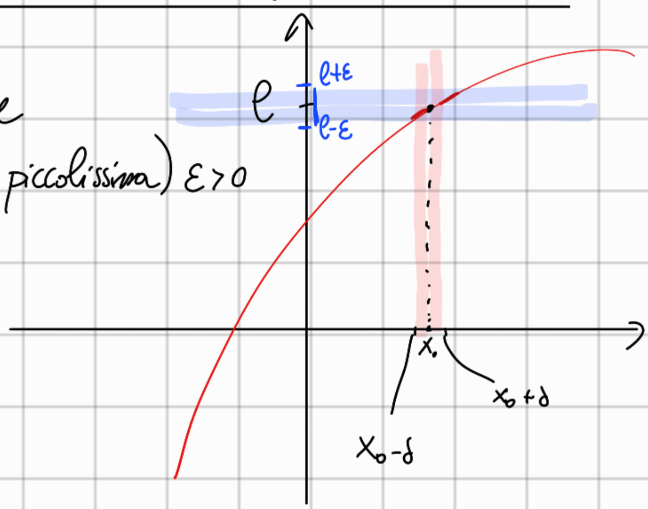
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

LIMITE PER X CHE TENDE A x_0 DI f DI X UGUALE ℓ

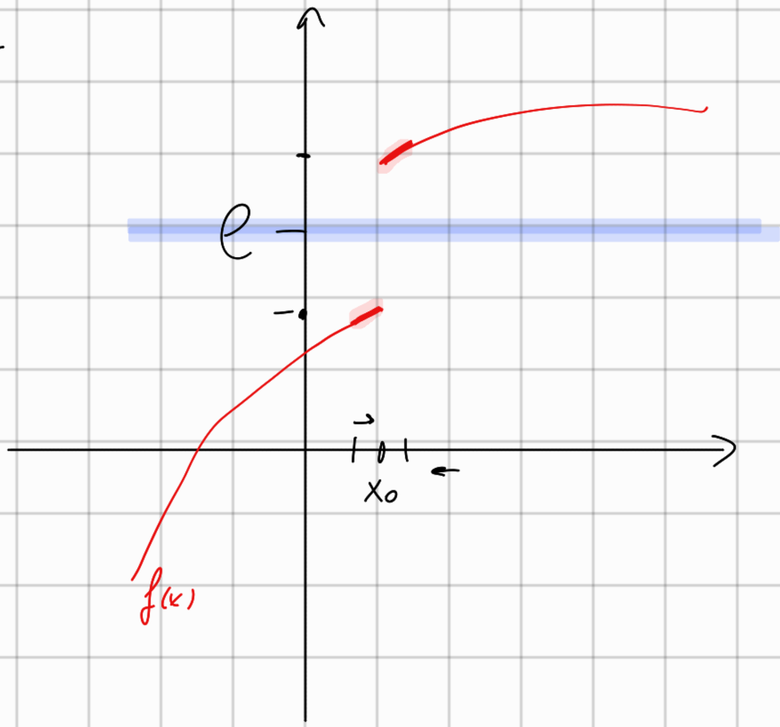
$\ell \in \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists I_\delta(x_0) \quad$ t.c. $\quad \forall \in I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon$

Significa che ogni volta che noi individuiamo una quantità (anche piccolissima) $\varepsilon > 0$ possiamo sempre trovare un intorno di punti vicini a x_0 tali che la funzione in quei punti è vicina a ℓ meno di ε.



ESEMPIO DI FUNZIONE CHE NON HA LIMITE IN x_0



Scelgo un $\varepsilon > 0$

I punti vicini a x_0 NON vengono mandati vicino a ℓ tramite f.