Lezione 15 8/11/24

PROPRIETÀ DEI LIMITI

$* \in \{x_0, \pm\infty\}$

- LIMITE DELLA SOMMA

$$\lim_{x\to *}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to *} f(x) + \lim_{x\to *} g(x)$$

- LIMITE DEL PRODOTTO

$$\lim_{x\to *}[f(x)\,g(x)] = \lim_{x\to *} f(x) \cdot \lim_{x\to *} g(x)$$

- LIMITE DEL RAPPORTO

$$\lim_{x\to *}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to *} f(x)}{\lim_{x\to *} g(x)} \quad \text{SE} \quad \lim_{x\to *} g(x) \neq 0$$

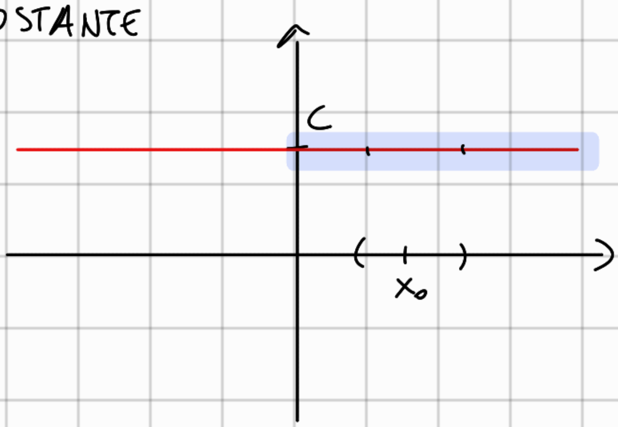
- LIMITE DEL PRODOTTO PER UNA COSTANTE $a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to *} a\,f(x) = a \lim_{x\to *} f(x)$$

▨ CASO PARTICOLARE: LIMITE DELLA COSTANTE

Data $c \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to *} c = c$$



"OPERAZIONI CON I LIMITI E INFINITO"

Se ho $\lim [f(x)+g(x)]$ con queste scritture $(+\infty+\ell)$ intendo che f tende a $+\infty$ e g tende a $+\ell$, e così via

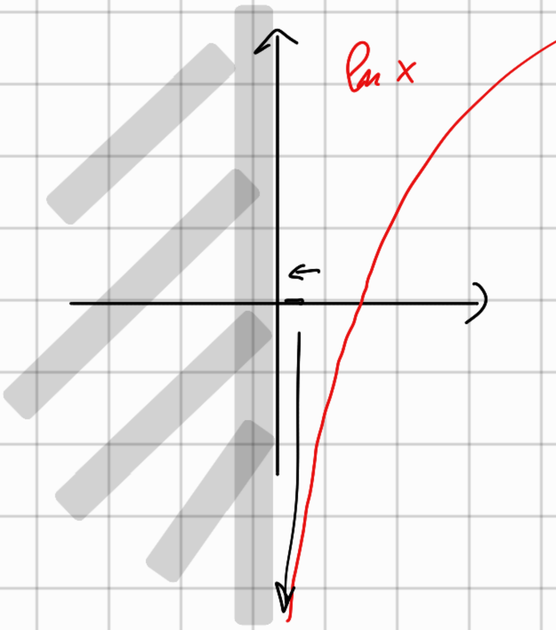
$$+\infty+\ell = +\infty$$
$$-\infty+\ell = -\infty \qquad \ell\in\mathbb{R}$$
$$+\infty+\infty = +\infty$$
$$-\infty-\infty = -\infty$$

$$\boxed{+\infty-\infty = ?} \rightarrow \text{DIPENDE} \begin{cases} 0 \\ \ell\in\mathbb{R} \\ +\infty \\ -\infty \end{cases}$$

ESEMPIO

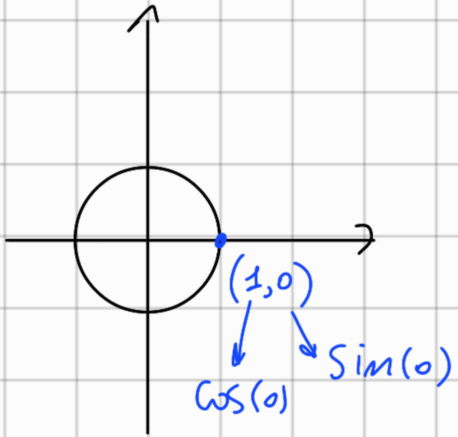
$$\lim_{x\to0^+}\left[(x^2+1)+\frac{1}{x}\right] = \lim_{x\to0^+}(\underset{\substack{\downarrow\\0}}{x^2}\underset{\substack{\downarrow\\1}}{+1}) + \underbrace{\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}\right)}_{\downarrow} = (1+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x\to0^+}[\underbrace{\ln x}_{\substack{\downarrow\\-\infty}} + \underbrace{\cos x}_{\substack{\downarrow\\1}}] = -\infty$$

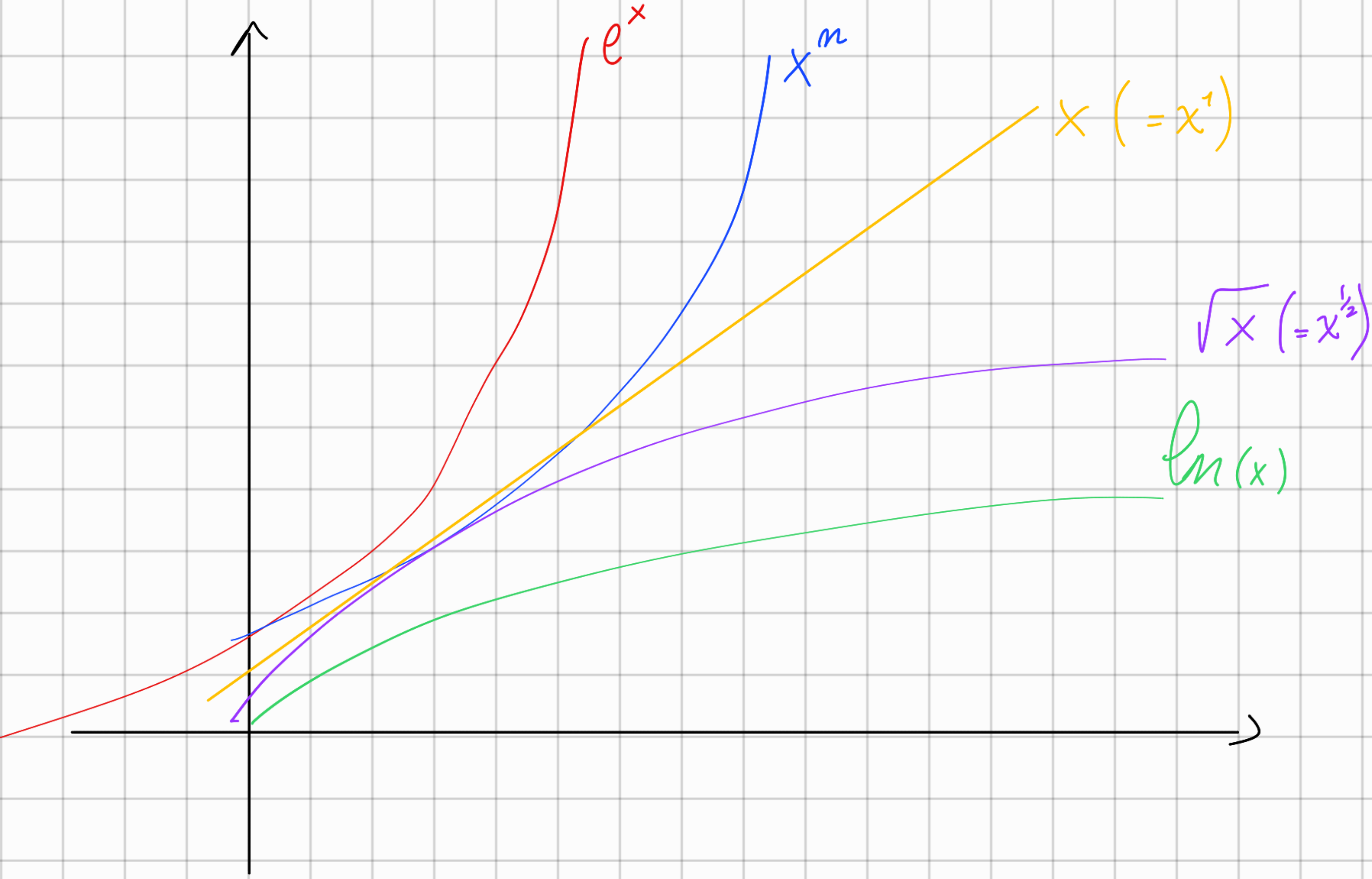


$$\lim_{x\to+\infty}[\underset{\downarrow}{x^4}-\underset{\downarrow}{x^3}] = \lim_{x\to+\infty}\left[\underset{\substack{\downarrow\\+\infty}}{x^4}\underbrace{\left(1-\underbrace{\frac{1}{x}}_{\substack{\downarrow\\0}}\right)}_{1}\right] = +\infty$$

$$+\infty-(+\infty)$$
$$+\infty-\infty$$



GERARCHIA DEGLI INFINITI



$$\lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt[3]{x^2} - \underbrace{\sqrt{x^3}} \right] = -\infty$$

$$\downarrow$$

$+\infty \quad -\infty$

$x^{\frac{2}{3}} \quad x^{\frac{3}{2}}$

$$\frac{3}{2} > \frac{2}{3}$$

PRODOTTO $\ell \neq 0$

$$(\pm\infty)(\pm\ell) = \pm\infty$$

$$\left(\frac{\pm\infty}{\pm\ell}\right) = \pm\infty$$

SCELGO IL + O IL -
RISPETTANDO LA REGOLA USUALE

$(+)\cdot(+) = +$
$(-)\cdot(-) = +$
$(+)\cdot(-) = -$
$(-)\cdot(+) = -$

$$\frac{\pm\ell}{0^\pm} = \pm\infty$$

$$\frac{\pm\infty}{0^\pm} = \pm\infty$$

$$\frac{0^\pm}{\pm\infty} = 0$$

$$\frac{\infty}{\infty} = F.I$$

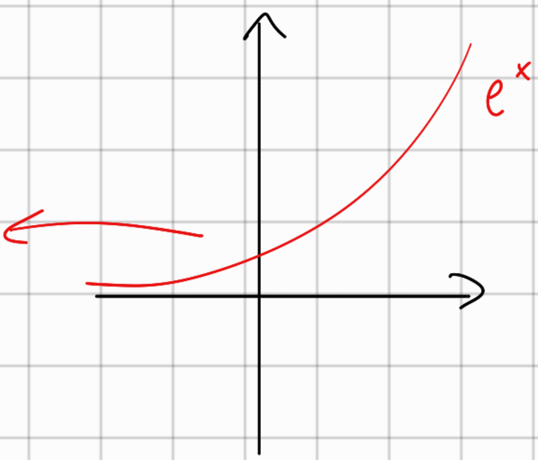
$$\frac{0}{0} = F.I.$$

$$\infty \cdot 0 = F.I$$

ESEMPI

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\boxed{x^2-1}^{\;\to 0-1}}{\underset{\downarrow}{x^3}} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{3x+1}{\ln x} = \frac{1}{-\infty} = 0$$



$$\lim_{x\to -\infty} \frac{5}{e^x} = \frac{5}{0^+} = +\infty$$

COME SI RISOLVE LA F.I. $\frac{0}{0}$? Devo semplificare qualcosa.
(PIÙ AVANTI DE L'HOSPITAL)

$$\lim_{x\to 4^+} \frac{\boxed{x-4}^{\;\to 0^+}}{\underset{16-32+16 \;\to\; 0^+}{\boxed{x^2-8x+16}}} = \lim_{x\to 4^+} \frac{\cancel{x-4}}{(x-4)^{\cancel{2}}} = \lim_{x\to 4^+} \frac{1}{\underset{0^+}{x-4}} = +\infty$$

$4^+ - 4 = 0^+$

COME SI RISOLVE $\frac{\infty}{\infty}$? Posso
- semplificare qualcosa
- usare De-l'Hopital

OPPURE IN SE $x \longrightarrow +\infty$ posso usare la gerarchia degli infiniti.

$$\lim_{x\to \infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty} \begin{cases} \infty & \text{SE IL NUMERATORE È DI ORDINE SUPERIORE} \\ 0 & \text{SE IL DENOMINATORE È DI ORDINE SUPERIORE} \\ \ell & \text{SE SONO DELLO STESSO ORDINE} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\overset{+\infty}{x^4+2}}{\underset{+\infty}{100x^3+x^2}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\overset{+\infty}{x^2}}{\underset{+\infty}{x^3+1}} = 0$$

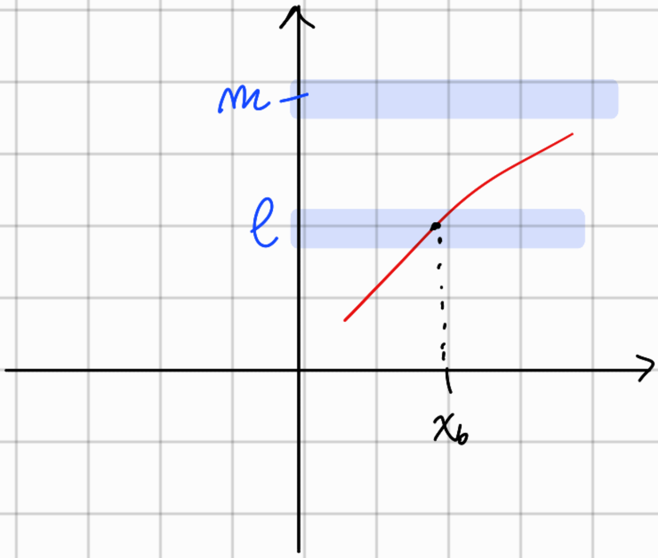
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\textcircled{3}x^2-7x+3}{\textcircled{5}x^2+1} = \frac{3}{5}$$

F.I.

TEOREMA [UNICITÀ DEL LIMITE]

Se $f(x)\longrightarrow \ell$ per $x\longrightarrow x_0$. <u>Tale limite è unico</u>

Cioè $\nexists\, m\neq\ell$ t.c. $f(x)\longrightarrow m$



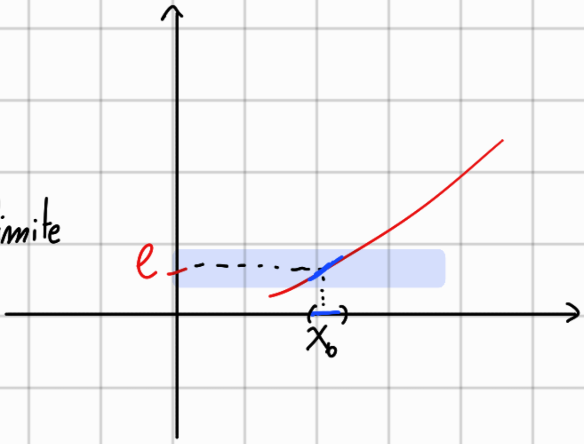
TEOREMA [PERMANENZA DEL SEGNO]

Se $f(x) \longrightarrow \ell \neq 0$ per $x \longrightarrow x_0$

Esiste un intorno $I(x_0)$ in cui $f(x)$ continua ad avere lo stesso segno di ℓ.

DIM. (PER CASA)

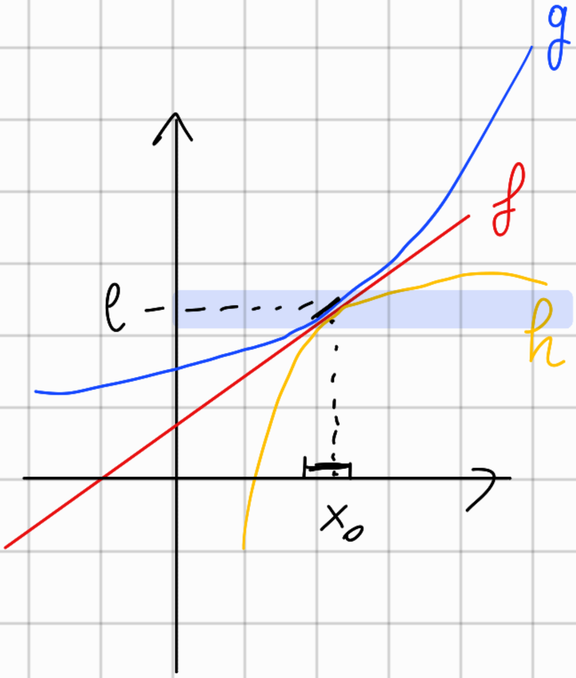
Si dimostra utilizzando la definizione di limite scegliendo $\varepsilon = \frac{\ell}{2}$



TEOREMA [CONFRONTO o DEI CARABINIERI]

Siano h, f, g funzioni tali che

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x) \qquad \forall x \in I(x_0)$$



SE

$$\underbrace{\lim_{x \to x_0} h(x) =}_{①} \overbrace{\ell = \lim_{x \to x_0} g(x)}^{②}$$

ALLORA $\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell}$

DIM.

① $\forall \varepsilon > 0 \ \exists I_{\delta_1}(x_0)$ t.c. $\forall x \in I_{\delta_1}(x_0) \setminus \{x_0\}$ $\quad \underline{|h(x) - \ell| < \varepsilon}$

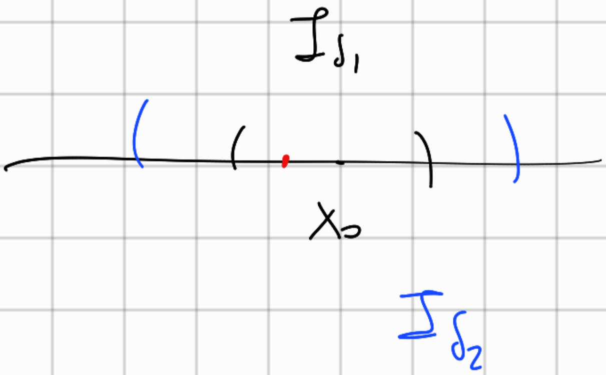
② $\forall \varepsilon > 0 \ \exists I_{\delta_2}(x_0)$ t.c. $\forall x \in I_{\delta_1}(x_0) \setminus \{x_0\}$ $\quad \underline{|g(x) - \ell| < \varepsilon}$

$$\underline{\ell - \varepsilon < h(x)} < \ell + \varepsilon \qquad \text{se } x \in I_{\delta_1}(x_0)$$

$$\ell - \varepsilon < \underline{g(x) < \ell + \varepsilon} \qquad \text{se } x \in I_{\delta_2}(x_0)$$

Se scelgo $\delta = \underset{\text{MINIMO}}{\min}\{\delta_1, \delta_2\}$ VALGONO ENTRAMBE

per $x \in I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$



$$\ell - \varepsilon < h(x) \le f(x) \le g(x) < \ell + \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\forall x \in I_\delta(x_1) \setminus \{x_0\} \quad \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$$

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon$$

$$\downarrow$$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ PER DEFINIZIONE

□

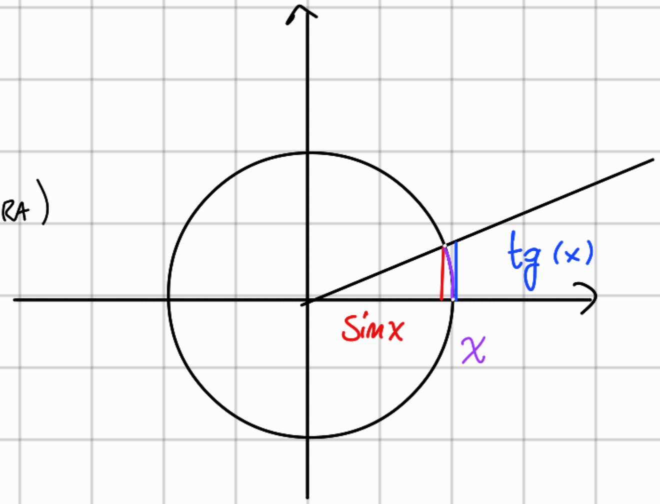
APPLICAZIONE : LIMITE NOTEVOLE $\frac{\sin x}{x}$ per $x \to 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\boxed{\sin x} \to 0}{\underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\boxed{x}}} = \frac{0}{0} \quad \text{F.I}$$

DIM.

Se x è vicino a 0 vale questo (VEDI FIGURA)

$$\sin x < x < \tg x = \frac{\sin x}{\cos x}$$



$$\frac{1}{\sin x} > \frac{1}{x} > \frac{\cos x}{\sin x}$$

$\downarrow$ MOLTIPLICO PER $\sin x$

$$1 > \boxed{\frac{\sin x}{x}} > \cos x$$

RICORDO

$3 < 4 < 5 \Rightarrow \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \frac{1}{5}$

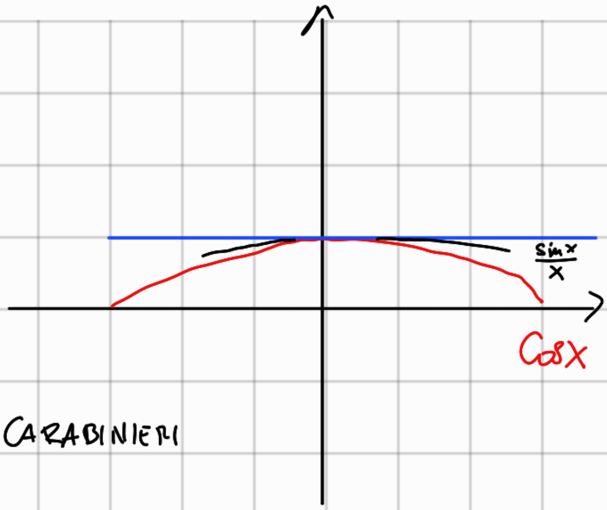
$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

POICHÉ VALE ANCHE

$$\lim_{x\to 0} \cos x = 1 = \lim_{x\to 0} 1$$

$\Downarrow$ PER IL TEOREMA DEI CARABINIERI

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$



LIMITI NOTEVOLI

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$ ← DEFINIZIONE DI e

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$$

Se non li ricordate si possono ricavare (A PARTE LA DEF DI e) utilizzando il teorema di DE-L'HOSPITAL che vedremo dopo aver fatto le derivate

I LIMITI NOTEVOLI SI POSSONO GENERALIZZARE IN QUESTO MODO:

Se $f(x)$ è UNA FUNZIONE CHE TENDE A 0 PER $x \to x_0$ CIOÉ $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$

ALLORA VALE

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\sin(f(x))}{f(x)} = 1$$

ESEMPIO :

$$\lim_{\underline{x\to 4}} \frac{\sin(x-4)}{x-4} = 1$$

- $f(x) = x+4$
- $\lim_{x\to 4} f(x) = 0$

ESEMPIO DI APPLICAZIONE DEL LIMITE NOTEVOLE PER RISOLVERE F.I. $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\overset{\nearrow 0}{x^2}}{\underset{\downarrow \atop 0}{\sin x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}}}{\underset{\downarrow \atop 1}{\frac{\sin x}{x}}} = \lim_{x\to 0} x = 0$$